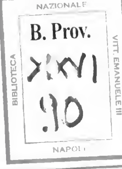
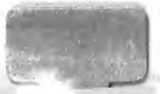



FONDO PROVINCIA


NAZIONALE
B. Prov.
BIBLIOTECA
VITT. EMANUELE III
NAPOLI





Lehrbuch

der

allgemeinen Arithmetik.

Zweiter Theil.





Lehrbuch

der

allgemeinen Arithmetik

zum

Gebrauche an höheren Lehranstalten

und beim

Selbststudium

von

Dr. Carl Spitz,
Professor am Polytechnikum in Carlsruhe.

Zweiter Theil:

Die Combinationslehre, den binomischen Satz, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die sich auf die menschliche Sterblichkeit gründenden Rechnungsarten, die höheren Gleichungen und die Einleitung zur Lehre von den Determinanten, nebst 500 Beispielen und Uebungsaufgaben enthaltend.

Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage.

Leipzig und Heidelberg.
C. F. Winter'sche Verlagshandlung.
1873.



Vorwort zur ersten Auflage.

Der vorliegende zweite Theil umfaßt in vier Abschnitten: die Combinationslehre, den binomischen Satz, die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die sich auf die menschliche Sterblichkeit gründenden Rechnungsarten. Sämmtliche Sätze wurden durch numerische Beispiele erläutert und am Ende eines jeden Abschnittes befindet sich eine beträchtliche Anzahl von Uebungsaufgaben. Die Resultate hierzu nebst Andeutungen zu ihrer Auffindung sind als Anhang in einem besonderen Heftchen erschienen.

Um den letzten Abschnitt, welcher die bei Renten- und Lebensversicherungsanstalten vorkommenden Rechnungsarten umfaßt, für den Gebrauch beim Unterrichte möglichst zweckmäßig anzuordnen, habe ich sämmtliche für die Praxis wichtigen Fälle als allgemeine Aufgaben behandelt und deren Auflösung durch Beispiele näher erläutert. Wenn gleich dieser Gegenstand hätte in kürzerer Weise dargestellt werden können, so gab ich doch der hier gewählten Behandlungsart den Vorzug, weil sie mir geeigneter schien, den Anfänger mit dem betreffenden Wissenszweige recht vertraut zu machen und ihm das Verständniß desselben zu erleichtern.

Es ist leider eine bekannte Thatsache, daß gerade dem genannten, so tief in das praktische Leben eingreifenden Gebiete der Mathematik an unseren Lehranstalten theils keine, theils nur eine sehr geringe Aufmerksamkeit geschenkt wird. Die für den Unterricht bestimmten Lehrbücher enthalten davon in der Regel kaum das Nothdürftigste, und behandeln selbst dieses in einer Weise, daß eine Anwendung der gewonnenen Lehren auf praktische Beispiele bei der diesem Gegenstande meist nur spärlich zugemessenen Zeit unmöglich ist. Es werden nämlich fast durchweg die Resultate der einzelnen bei Renten- und Lebensversicherungen vorkommenden Fälle mit Zugrundelegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt und in Reihen dargestellt, deren Summirungen bei der Anwendung höchst weitläufig und zeitraubend sind. Die Einführung von Werken, welche diesen Gegenstand speciell behandeln, würde dem Zwecke ebenfalls nicht entsprechen.

Um dem oben erwähnten Vorwurfe zu begegnen und auch das Hereinziehen numerischer Beispiele in den Unterricht zu erleichtern, habe ich die hierher gehörigen Fragen so ausführlich behandelt, als es nur der Zweck eines Lehrbuches erlaubt, sämmtliche Resultate in eine zur tabellarischen Berechnung bequeme Form gebracht und an dem Ende des Buches in den Tabellen **I. u. II.** die zur Lösung praktischer Beispiele nöthigen Werthe für 3- und 4 prozentige Zinsen mit Zugrundelegung der Baumann-Süßmilch'schen Sterblichkeitstabelle und siebenstelliger Logarithmen zusammengestellt.

Die Untersuchungen noch weiter auszudehnen und die Berechnung des Reservefonds u. dgl. aufzunehmen, hielt ich, als die Grenzen eines für den Unterricht bestimmten Lehrbuches übersteigend, nicht für rathsam. Wer sich eingehender mit dem



Studium des in Rede stehenden Wissenszweiges zu beschäftigen wünscht, findet reichliches Material in den Schriften von Bremiker, Jahn, Spitzer, Wiegand, Wild, Zillmer u. A.

Sollte diese Arbeit dem Lehrer einige Erleichterung beim Unterrichte gewähren und dem Studirenden zum leichteren Verständnisse von Werken verhelfen, welche sich mit den hier behandelten Disciplinen specieller befassen, so würde ich mich dadurch reichlich für meine Mühe belohnt fühlen.

Carlsruhe im März 1864.

Carl Spitz.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Gegenwärtige zweite Auflage unterscheidet sich von der früheren ganz besonders durch die Aufnahme zweier weiteren Abschnitte, die Lehre von den höheren Gleichungen mit einer Unbekannten und die Einleitung zur Lehre von den Determinanten enthaltend.

Die höheren Gleichungen sind möglichst ausführlich behandelt, während, dem Zwecke des Buches entsprechend von der Theorie der Determinanten nur so viel aufgenommen wurde, als zur strengen Begründung der Auflösung eines Systems linearer Gleichungen erforderlich ist. Es genügt dieses offenbar für den ersten Unterricht und als Vorbereitung zum Studium von Werken, welche diesen Gegenstand umfassender abhandeln.

Carlsruhe, im Januar 1873.

Carl Spitz.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Seite.

Zweiter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

Vierter Abschnitt.

Fünfter Abschnitt.

Sechster Abschnitt.

Verbesserungen.

S. 15 fehlt 1333 bei der 4. Klasse.

= 19 Z. 1 v. u. setze $\overset{3}{C}'$ u. $\overset{3}{C}$ statt C'^3 u. C^3.

= 21 Z. 1 v. o. setze $\overset{5}{C}'$ u. $\overset{5}{C}$ statt C'^5 u. C^5.

= 50 Z. 1 v. o. setze ν statt v.

= 73 Z. 14 v. o. setze $\overset{7}{C}_3$ statt C_3.

= 96 Z. 5 v. u. setze P_{m+1} statt P_{+1}.

Erster Abschnitt.

Die Combinationslehre.

§. 1. Erklärungen.

1) Die **Combinationslehre** oder **Syntaktik** hat zum Gegenstande: aus gegebenen Dingen (Größen oder Zahlen) **alle denkbaren Zusammenstellungen** unter bestimmten Voraussetzungen **zu bilden**, sowie die **Anzahl** dieser Verbindungen **zu bestimmen**, ohne dieselben wirklich aufzustellen.

2) Jede solche Verbindung heißt eine **Complexion** und deren Bestandtheile werden die **Elemente** derselben genannt.

3) Zur Bezeichnung der Elemente wählt man gewöhnlich **Buchstaben** oder **Zahlen**, und sagt alsdann eine Complexion sei **geordnet**, wenn die Elemente bezüglich in alphabetischer Ordnung, oder in der Ordnung unserer Zahlenreihe neben einander stehen; im anderen Falle heißt sie **ungeordnet**.

4) Eine Complexion wird nach dem äußersten Elemente zur Linken benannt und heißt von **höherem Range** als eine andere, wenn an einer **früheren** Stelle zur Linken ein in der natürlichen Ordnung **später** vorkommendes Element steht, als in dieser.

So sind z. B. adbc und abdc zwei Complexionen von der Ordnung a, aber jene ist von höherem Range als diese, weil d in jener Complexion an der zweiten, in dieser aber erst an der dritten Stelle steht. Ebenso ist die Complexion 12534 von höherem Range als 12354; beide aber sind von der Ordnung 1.

5) In Bezug auf die Anzahl der Elemente ist eine Complexion von der ersten, zweiten, ... nten Klasse, je nachdem sie bezüglich aus 1, 2, 3, ... n Elementen besteht. Complexionen der ersten Klasse werden auch Unionen, solche der zweiten Klasse Binionen, der dritten Klasse Ternionen, der vierten Klasse Quaternionen u. s. f. genannt.

6) Hinsichtlich der Elemente selbst unterscheidet man Complexionen ohne Wiederholung, wenn sämmtliche Elemente von einander verschieden sind, und Complexionen mit Wiederholung, wenn ein und dasselbe Element mehrmals darin vorkommt.

So ist z. B. abcdf eine Complexion ohne Wiederholung, dagegen aabbbc eine solche mit Wiederholung.

7) Je nach der Art der Bildung der Complexionen aus gegebenen Elementen unterscheidet man in der Combinationslehre drei Hauptheile, nämlich:

1) das Permutiren oder Versetzen,
2) das Combiniren oder Verbinden,
3) das Variiren oder Verbinden und Versetzen.

A. Das Permutiren.

§. 2. Erklärungen.

1) Werden n gegebene Elemente so oft als nur möglich in einer anderen Ordnung neben einander gestellt, so nennt man diese Operation das Permutiren und jede Zusammenstellung oder Complexion eine Permutationsform oder kurzhin eine Permutation.

2) Die Aufgabe des Permutirens wird durch Vorsetzen des Zeichens P vor die zu permutirenden Elemente angedeutet.

So wird z. B. durch P (abcd) ausgedrückt, daß die vier Elemente a, b, c, d permutirt werden sollen.

3) Die Anzahl aller möglichen Permutationen gegebener Elemente wird durch die entsprechende Permutationszahl bestimmt.

Um auszudrücken, daß man nicht die Permutation selbst, sondern nur deren Anzahl zu haben wünscht, fügt man dem

Permutationszeichen P rechts unten die Anzahl der gegebenen Elemente bei.

So heißt z. B. P_n man soll die Anzahl aller Permutationen von n Elementen angeben.

Sind unter den n Elementen aber nur einige, z. B. nur drei verschieden, die sich also wiederholen, und kommt etwa das eine m, das andere p und das dritte q mal vor, so wird die entsprechende Permutationszahl durch $P_{\frac{n}{m,p,q}}$ angedeutet.

§. 3. Bildung der Permutationen.

Um gegebene Elemente zu permutiren, verfahre man auf folgende Weise:

Man schreibe die Elemente zuerst von der Linken gegen die Rechte in natürlicher Ordnung neben einander und leite nun aus dieser niedrigsten Complexion der Reihe nach die auf einander folgenden höheren Complexionen in der Weise her, daß man von rechts gegen links an die Stelle des ersten niedrigeren Elementes das rechts stehende höhere Element setzt, alle Elemente zur Linken von dieser Stelle aus aber unverändert läßt und die übrigen Elemente gegen die Rechte in natürlicher Ordnung anschreibt. Dieses Verfahren wiederhole man so lange als möglich. Schließlich wird man zur höchsten Permutation gelangen, welche also durch die vorgelegten Elemente in umgekehrter Reihenfolge gebildet ist.

Wiederholen sich einzelne Elemente, so bleibt die Bildung ganz dieselbe.

Zur Erläuterung folgen nachstehend einige

Beispiele.

$$1)\ P(ab) = \begin{cases} ab \\ ba \end{cases}$$

$$2)\ P(abc) = \begin{cases} abc \\ acb \\ bac \\ bca \\ cab \\ cba \end{cases}$$

3) P (abbcc) =

abbcc	bbcac	cacbb
abcbc	bbcca	cbabc
abccb	bcabc	cbacb
acbbc	bcacb	cbbac
acbcb	bcbac	cbbca
accbb	bcbca	cbcab
babcc	bccab	cbcba
bacbc	bccba	ccabb
baccb	cabbc	ccbab
bbacc	cabcb	ccbba

4) P (1234) =

1234	2134	3124	4123.
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Anmerkung. Anstatt P (abbcc), P (112333) u. s. w. schreibt man häufig auch zur Abkürzung P (ab^2c^2), P $(1^2 2 3^3)$ rc. und nennt alsdann die an der Stelle der Exponenten stehenden Zahlen die Wiederholungsexponenten der betreffenden Elemente.

§. 4. Lehrsatz.

Die Permutationen gegebener Elemente lassen sich immer so anordnen, daß jede Complexion aus der nächst vorhergehenden durch Vertauschung von nur zwei Elementen entsteht.

Beweis. Man kann offenbar setzen:

P (ab) = { ab, ba }   P (abc) = { abc bca cab, acb bac cba }

P (abcd) =

abcd	bdca	cabd	dcba
abdc	bdac	cadb	dcab
acdb	bcad	cbda	dbac
acbd	bcda	cbad	dbca
adbc	badc	cdab	dacb
adcb	bacd	cdba	dabc

woraus hervorgeht, daß obiger Satz für 2, 3 u. 4 Elemente richtig ist.

Nehmen wir nun an derselbe gelte allgemein für die n Elemente b, c, d, ... x, y und die Permutationen dieser Elemente seien in der Weise geordnet, daß jede folgende aus der nächst

vorhergehenden durch Vertauschung von nur zwei Elementen erhalten wird, so stimmen die Permutationen, welche erhalten werden, wenn man jeder Complexion jener n Elemente noch ein (n + 1) tes Element a vorsetzt, in der angeführten Eigenschaft mit den ursprünglichen Permutationen überein. In der letzten Permutationsform vertausche man nun b mit a, so daß also diese Complexion von der Ordnung b wird, ordne alle Permutationen der nach b stehenden n Elemente wieder so, daß jede folgende aus der nächst vorhergehenden durch Vertauschung von nur zwei Elementen entsteht und setze jeder der erhaltenen Complexionen b vor. In der letzten dieser Permutationen vertausche man nun c mit b, ordne alle Permutationen der nach c stehenden n Elemente wieder der Art, daß jede folgende aus der nächst vorhergehenden durch Vertauschung von nur zwei Elementen erhalten wird u. s. w.

Fährt man fort in dieser Weise zu operiren, bis man schließlich allen Permutationen der n Elemente a, b, c, ... x als (n + 1) tes Element y vorgesetzt hat, so sind die (n + 1) Elemente auf die gewünschte Weise angeordnet.

Da nun obiger Satz für n = 2, 3 u. 4 als richtig erkannt wurde, so ist er nach Vorstehendem auch für n = 4 + 1 = 5 und somit wieder für n = 5 + 1 = 6 u. s. f. d. h. allgemein richtig.

Zusatz.

1) Um durch Vertauschung von nur zwei Elementen die Permutation

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots. n-2, n-1, n$$

überzuführen in:

$$n, n-1, n-2, n-3, \ldots. 3, 2, 1$$

kann man zuerst 1 mit n, dann 2 mit n − 1, hiernach 3 mit n − 2 u. s. w. vertauschen. Es sind alsdann $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ solcher Vertauschungen erforderlich, je nachdem n gerade oder ungerade ist, da im zweiten Falle das mittlere Element an seiner Stelle verbleibt.

So sind z. B. zum Uebergange der Formen:

	123,	1234,	12345,	123456,	1234567
in	321,	4321,	54321,	654321,	7654321
	1,	2,	2,	3,	3

Vertauschungen erforderlich.

Aufgabe. Schreibet diese Vertauschungen nieder.

2) Wie man sich leicht überzeugt kann die Anordnung

1, 2, 3, ... n — 2, n — 1, n

in n, n — 1, n — 2, ... 3, 2, 1

auch auf folgende Art übergeführt werden. Man vertausche zuerst der Reihe nach

1 mit 2, 1 mit 3, 1 mit 4, ... 1 mit n — 1, 1 mit n

und gelangt alsdann zur Form:

2, 3, 4, ... n — 1, n, 1.

Hierin vertausche man wieder der Reihe nach

2 mit 3, 2 mit 4, 2 mit 5, ... 2 mit n — 1, 2 mit n,

wodurch die Permutation

3, 4, 5, ... n — 1, n, 2, 1

erhalten wird u. s. w.

Man erkennt aus dieser Bildungsweise sofort, daß die Anzahl der erforderlichen Vertauschungen übereinstimmt mit der Zahl, welche ausdrückt, wie oftmals man von n Elementen jedes Element mit jedem aller folgenden verbinden kann. Da dieses aber auf $\frac{n(n-1)}{2}$ Arten geschehen kann, so ist auch die Anzahl der erforderlichen Vertauschungen $\frac{n(n-1)}{2}$.

Aufgabe. Entwickelt die in 1. vorgelegte Aufgabe auf die eben bezeichnete Weise!

3) Die Zahlen $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ einerseits und $\frac{n(n-1)}{2}$ andererseits sind stets gleichzeitig gerade oder ungerade. Denn

für $n = 4m$ ist $\frac{n}{2} = 2m$, $\frac{n(n-1)}{2} = 2m(4m-1)$

„ $n = 4m+1$ „ $\frac{n-1}{2} = 2m$, $\frac{n(n-1)}{2} = 2m(4m+1)$

„ $n = 4m+2$ „ $\frac{n}{2} = 2m+1$, $\frac{n(n-1)}{2} = (2m+1)(4m+1)$

für $n = 4m+3$ ist $\frac{n-1}{2} = 2m+1$, $\frac{n(n-1)}{2} = (4m+3)(2m+1)$.

§. 5. Anzahl der Permutationen.

1) Ein Element läßt nur eine Permutation zu.

Kommt noch ein zweites Element hinzu, so kann dieses nach und vor dem ersten stehen und man erhält somit für zwei Elemente 1 . 2 Permutationen oder

$$P_2 = 1 . 2.$$

Fügen wir noch ein drittes Element hinzu, so kann dieses in jeder der vorhergehenden zwei Permutationen wieder drei verschiedene Stellen einnehmen, nämlich nach dem zweiten Elemente, zwischen dem ersten und zweiten und vor dem ersten Elemente. Man erhält somit aus jeder Complexion der Permutationen zweier Elemente durch Hinzufügen eines dritten Elementes drei Complexionen mit drei Elementen, also im Ganzen 1 . 2 . 3 oder 6 Complexionen und es ist demnach

$$P_3 = 1 . 2 . 3.$$

Fährt man in dieser Weise fort, immer neue Elemente hinzuzufügen, so findet man die Anzahl der Permutationen von vier Elementen oder

$$P_4 = 1 . 2 . 3 . 4$$

und allgemein die Anzahl von n Elementen oder

$$P_n = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots (n-1) n.$$

Man nennt ein solches Produkt der in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden Zahlen von 1 bis zu irgend einer Zahl n, die Fakultät von n und bezeichnet solche kurzhin durch n!

Hiernach erhält man also auch für die Anzahl der Permutationen von n Elementen ohne Wiederholung:

$$P_n = n! \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

2) Um nun die Anzahl der Permutationen zu bestimmen, wenn unter den n zu permutirenden Elementen m gleiche vorkommen, berücksichtige man, daß wenn sämmtliche Elemente von einander verschieden wären, man n! Permutationen erhalten würde. Da nun aber m Elemente allein m! Permutationen zulassen, so zerfallen jene n! Versetzungen in lauter Gruppen von je m! Complexionen, welche gruppenweise einander gleich werden,

sobald man m der gegebenen n Elemente einander gleich setzt. Sind daher unter n Elementen m einander gleich, so erhält man für die Anzahl der Permutationen

$$P_{\frac{n}{m}} = \frac{n!}{m!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

3) Treten unter n Elementen außer m auch noch p gleiche Elemente auf, so führt eine analoge Betrachtung zu dem Schlusse, daß alsdann für die Anzahl der Versetzungen erhalten wird:

$$P_{\frac{n}{m,p}} = \frac{n!}{m!\,p!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

Allgemein wird daher sein:

$$P_{\frac{n}{m,p,q,r\ldots}} = \frac{n!}{m!\,p!\,q!\,r!} \quad \ldots\ldots\ldots\ (4).$$

Beispiele.

1) Wie viel vierziffrige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 2, 5, 7, 8 bilden?

Auflösung.

Nach Formel (1) erhält man

$P_4 = 4! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 24$ Zahlen.

2) Auf wie viel Arten können 12 in einer Reihe nebeneinander sitzende Personen ihre Plätze wechseln, so daß sie jedesmal in einer anderen Ordnung aufeinander folgen?

Auflösung.

$P_{12} = 12! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 9 \,.\, 10 \,.\, 11 \,.\, 12$
$= 479001600$ Arten.

3) Wenn man alle Permutationen der Ziffern 3, 5, 7, 8 unter einander schreibt, so erhält man für jede Vertikalreihe welche Summe?

Auflösung.

4 Ziffern lassen $4! = 24$ Permutationen zu. Jede Vertikalreihe enthält aber jede der Ziffern 6mal, also ist die Summe einer solchen

$= 6\,(3 + 5 + 7 + 8) = 6 \,.\, 23 = 138.$

4) Wie heißt die 400te Permutation von abcdef?

Auflösung.

Im Ganzen erhält man $6! = 720$ Permutationen. Hiervon sind der Reihe nach 120 von der Ordnung a, 120 von der Ordnung b, 120 von der Ordnung c, und mit der 361ten beginnen diejenigen von der Ordnung d. Von diesen ist die zu suchende die 40te.

Nehmen wir nun d als erstes Element an, so hat man noch abcef zu permutiren. Von diesen Permutationen beginnen die ersten 24 mit a, die 25te Form ist von der Ordnung b. Nehmen wir jetzt b als Anfangsglied, so bleibt noch acef zu permutiren übrig. Von diesen Permutationen sind der Reihe nach 6 von der Ordnung a und 6 von der Ordnung c, die (360 + 24 + 12 + 1) te oder 397te Permutation der vorgelegten Elemente heißt somit dbeacf, die 398te dbeafc, die 399te dbecaf und die 400te dbecfa.

§. 6. Aufgaben zur Uebung.

1) Sämmtliche Zahlen anzugeben, welche sich aus den fünf Ziffern 2, 5, 7, 8 und 9 bilden lassen.

2) Bildet sämmtliche Permutationen der Elemente u, v, w, x.

3) Bildet $P(a^2cd)$.

4) $P(a^3b^2c)$ zu bilden.

5) Bildet $P(3^2 4^2 5^2)$.

6) $P(x^3y^3)$ zu bilden.

7) Wie oft können 7 neben einander stehende Personen die Ordnung ihrer Aufeinanderfolge ändern?

8) In einer Gesellschaft befinden sich 6 Herren und 6 Damen. Wie oft können diese Personen in anderer Ordnung sitzen, wenn nie 2 Herren oder 2 Damen neben einander kommen dürfen?

9) Wie viel fünfziffrige Zahlen lassen sich mit den Ziffern 1, 4, 5, 7, 9 überhaupt anschreiben?

10) Wie viel Zahlen lassen sich mit den 6 Ziffern 3, 3, 4, 5, 5, 6 anschreiben und wie heißen dieselben?

11) Wie viel Versetzungen können aus der Complexion $a^3b^4c^2df^5$ gebildet werden?

12) Wie viel Permutationsformen lassen die Ziffern 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9 zu?

13) Wie viel Complexionen der Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, beginnen: α) mit 3; β) mit 1 2; γ) mit 1 2 3; δ) mit 1 2 3 4?

14) Wie viel Complexionen befinden sich unter den Versetzungen der vorigen Aufgabe, in welchen die Ziffern 1, 2, 3, 4, in beliebiger Ordnung neben einander stehen?

15) Wie viel Complexionen lassen sich aus den Elementen abcd bilden, welche mit bd beginnen?

16) Wie oft stehen in den Versetzungen von abcdef die Buchstaben **bf** in ebendieser Ordnung nebeneinander?

17) Wie groß ist die Summe der Ziffern aller Zahlen, welche sich aus den Ziffern 1, 1, 2, 2, 2, 3 bilden lassen?

18) Die wie vielte Permutation der Elemente aabbcc heißt bcacba?

19) Wie heißt die 28te Versetzung der Complexion abcd?

20) Die wie vielte Permutationsform der Elemente begnor heißt borgen?

B. Das Combiniren.

§. 7. Erklärungen.

1) Wird aus einer Anzahl gegebener Elemente so oft als möglich eine bestimmte Anzahl von Elementen herausgenommen und zu einer Complexion verbunden, so nennt man diese Operation das Combiniren im engeren Sinne und jede der erhaltenen Complexionen eine Combinationsform oder kurzhin eine Combination.

2) Die Anzahl der zu einer Complexion verbundenen Elemente bestimmt die Klasse der Combination und die Zahl, welche die Klasse ausdrückt, heißt der Klassenexponent.

3) Je nachdem jede Complexion dasselbe Element nur einmal, oder so oft enthalten darf, als der Klassenexponent Einheiten hat, erhält man die Combinationen ohne, oder mit Wiederholung.

4) Die Aufgabe, daß n Elemente a, b, c, ... zur m ten Klasse combinirt werden sollen, deutet man an

a) bei Combinationen ohne Wiederholung durch $\overset{m}{C}(abc\ldots)$

b) bei Combinationen mit Wiederholung durch $\overset{m}{C}'(abc\ldots)$

Die Combinationszahl von n Elementen zur m ten Klasse, d. h. die Anzahl aller möglichen Combinationsformen von n Elementen zur m ten Klasse wird dagegen bezeichnet

a) bei Combinationen ohne Wiederholung durch $\overset{m}{C}_n$

b) bei Combinationen mit Wiederholung durch $\overset{m}{C}'_n$.

§. 8. Bildung der Combinationen.

a) Combinationen ohne Wiederholung.

1) Um die Combinationen der ersten Klasse zu bilden, schreibe man die einzelnen Elemente der natürlichen Ordnung nach an.

So ist z. B.

$$\overset{1}{C}(abcd) = a,\ b,\ c,\ d.$$

2) Die Combinationen der **zweiten** Klasse werden erhalten, wenn man jedes Element mit allen, der natürlichen Ordnung nach folgenden, verbindet.

So ist z. B.

$$\overset{2}{C}(abcd) = ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd.$$

3) Um die Combinationen der **dritten** Klasse zu bilden, verbinde man jedes Element der Reihe nach mit allen Complexionen der Combination zur zweiten Klasse, welche von einer höheren als durch jenes Element ausgedrückten Ordnung sind.

So ist z. B.

$$\overset{3}{C}(abcd) = abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

4) In ähnlicher Weise werden die übrigen Klassen aus den nächst vorhergehenden gebildet. Es leuchtet von selbst ein, daß die Anzahl der Klassen durch die der Elemente beschränkt ist.

Anmerkung. Bei einiger Uebung lassen sich die Combinationen gegebener Elemente zu einer bestimmten Klasse auch leicht angeben, ohne vorher die dieser Klasse vorangehenden Klassen für die vorgelegten Elemente zu bilden.

Beispiele.

$$\overset{3}{C}(12345) = \left\{\begin{array}{lll} 123 & 234 & 345 \\ 124 & 235 & \\ 125 & 245 & \\ 134 & & \\ 135 & & \\ 145 & & \end{array}\right. \qquad \overset{4}{C}(abcdf) = \left\{\begin{array}{ll} abcd & bcdf \\ abcf & \\ abdf & \\ acdf & \end{array}\right.$$

$$\overset{4}{C}(abcdfg) = \left\{\begin{array}{lll} abcd & bcdf & cdfg \\ abcf & bcdg & \\ abcg & bcfg & \\ abdf & bdfg & \\ abdg & & \\ abfg & & \\ acdf & & \\ acdg & & \\ acfg & & \\ adfg & & \end{array}\right.$$

b) Combinationen mit Wiederholung.

1) Um die Combinationen der ersten Klasse zu bilden, schreibe man die gegebenen Elemente der natürlichen Ordnung nach an.

2) Die Combinationen der zweiten Klasse werden erhalten, wenn man jedes Element mit sich und allen der natürlichen Ordnung nach folgenden verbindet.

So ist z. B.

$$\overset{2}{C}'(abcd) = \left\{\begin{array}{llll} aa & bb & cc & dd \\ ab & bc & cd & \\ ac & bd & & \\ ad & & & \end{array}\right.$$

3) Zur Bildung der dritten Klasse setze man jedes Element vor alle Complexionen der zweiten Klasse, welche von gleicher und höherer Ordnung sind, als das Element ausdrückt.

So ist z. B.

$$\overset{3}{C}'(abcd) = \left\{\begin{array}{llll} aaa & bbb & ccc & ddd \\ aab & bbc & ccd & \\ aac & bbd & cdd & \\ aad & bcc & & \\ abb & bcd & & \\ abc & bdd & & \\ abd & & & \\ acc & & & \\ acd & & & \\ add & & & \end{array}\right.$$

4) In ähnlicher Weise erhält man die übrigen Klassen aus den nächst vorhergehenden.

Beispiele.

$$\overset{4}{C}'(123) = \left\{\begin{array}{lll} 1111 & 2222 & 3333 \\ 1112 & 2223 & \\ 1113 & 2233 & \\ 1122 & 2333 & \\ 1123 & & \\ 1133 & & \\ 1222 & & \\ 1223 & & \\ 1233 & & \\ 1333 & & \end{array}\right.$$

$$\overset{5}{C}'(abc) = \left\{\begin{array}{lll} aaaaa & bbbbb & ccccc \\ aaaab & bbbbc & \\ aaaac & bbbcc & \\ aaabb & bbccc & \\ aaabc & bcccc & \\ aaacc & & \\ aabbb & & \\ aabbc & & \\ aabcc & & \\ aaccc & & \\ abbbb & & \\ abbbc & & \\ abbcc & & \\ abccc & & \\ acccc & & \end{array}\right.$$

c) Combinationen mit beschränkter Wiederholung.

Unter Combinationen mit beschränkter Wiederholung versteht man solche Combinationen, bei welchen angegeben ist, wie oft jedes der vorgelegten Elemente in jeder der Complexionen höchstens auftreten darf.

Um dieselben zu bilden, schreibe man zunächst die dem Klassen- und Wiederholungszeiger entsprechende niedrigste Ordnung an und combinire aus dieser mit Berücksichtigung des Wiederholungszeigers die übrigen Complexionen nach den obigen Regeln.

Um anzudeuten, daß die Elemente abcd so zur 4ten Klasse zu combiniren seien, daß sich a zweimal, b dreimal, c und d aber nicht wiederholen darf, schreibt man $\overset{4}{C}(a^2b^3cd)$ und erhält:

$$\overset{4}{C}(a^2b^3cd) = \left\{\begin{array}{lll} aabb & abbb & bbbc \\ aabc & abbc & bbbd \\ aabd & abbd & bbcd \\ aacd & abcd & \end{array}\right.$$

Ebenso ist:

$$\overset{3}{C}(abcd)^2 = \left\{\begin{array}{llllll} aab & abb & acc & bbc & bcd & cdd \\ aac & abc & acd & bbd & bdd & \\ aad & abd & add & bcc & ccd & \end{array}\right.$$

d) Combinationen zu einer bestimmten Quersumme.

Combinirt man gegebene Elemente in der Weise, daß die Summe ihrer Zeiger stets eine bestimmte Zahl ausmacht, so sagt

man, die Elemente seien zu einer bestimmten Quersumme combinirt worden.

Es sind hierbei mehre Fälle zu unterscheiden.

Man kann nämlich entweder alle möglichen Combinationen, oder nur einzelne Klassen dieser und zwar in beiden Fällen ohne, mit, oder mit beschränkter Wiederholung bilden. In allen Fällen werden jedoch gewöhnlich nur geordnete Verbindungen verlangt, weshalb wir auch stillschweigend stets solche voraussetzen.

Sollen alle möglichen Combinationen zu einer bestimmten Quersumme ohne Wiederholung gebildet werden, so schreibe man zuerst das Element an, welches der gegebenen Summe entspricht, um die erste Klasse zu erhalten. Ist dieselbe mehr als einziffrig, so überstreicht man das betreffende Element, um es von einer Complexion zu unterscheiden. Hieraus, so wie aus jeder weiteren Klasse wird nun die nächstfolgende erhalten, wenn man jedes der vorgelegten Elemente der natürlichen Ordnung nach, jeder Complexion der zunächst voranstehenden Klasse von höherer Ordnung voranschreibt, dasselbe aber auch vom letzten Element eben jener Complexion subtrahirt und die Differenz statt dieses Elementes setzt. Fährt man auf diese Weise fort zu operiren, bis die Elemente aufhören in natürlicher Ordnung auf einander zu folgen, so hat man sämmtliche Combinationen gefunden, welche der verlangten Bedingung genügen.

Um z. B. 1, 2, 3, ... zur Summe 12 ohne Wiederholung zu combiniren, hat man:

1. Klasse.	2. Klasse.	3. Klasse.	4. Klasse.
$\overline{12}$	$1\overline{11}$	129	1236
	$2\overline{10}$	138	1245
	39	147	
	48	156	
	57	237	
		246	
		345	

Um alle möglichen Combinationen zu einer bestimmten Summe mit Wiederholung zu bekommen, verfahre man ähnlich wie vorhin, setze aber jedes Element jeder Complexion vor, welche von keiner niedrigeren Ordnung ist.

So erhält man z. B. zur Summe 10 für die

1. Klasse.	2. Klasse.	3. Klasse.	4. Klasse.	5. Klasse.
$\overline{10}$	19	118	1117	11116
	28	127	1126	11125
	37	136	1135	11134
	46	145	1144	11224
	55	226	1225	11233
		235	1234	12223
		244	2224	22222
		334	2233	

Ebenso findet man für die sechste Klasse zur Summe 18:

$1111\overline{13}$	111339	112338	122247	222237
$1111 2\overline{12}$	111348	112347	122256	222246
$1111 3\overline{11}$	111357	112356	122337	222255
$1111 4\overline{10}$	111366	112446	122346	222336
111159	111447	112455	122355	222345
111168	111456	113337	122445	222444
111177	111555	113346	123336	223335
$1112 2\overline{11}$	$1122 2\overline{10}$	113355	123345	223344
$1112 3\overline{10}$	112239	113445	133444	233334
111249	112248	114444	133335	333333
111258	112257	122229	133344	
111267	112266	122238	222228	

§. 9. Anzahl der Combinationen.

a) Combinationen ohne Wiederholung.

1) Da jedes Element bei der Bildung der ersten Klasse nur eine Complexion zuläßt, so erhält man für die Anzahl der Unionen

$$\overset{1}{C}_n = n.$$

2) Denken wir uns nun jedes Element mit allen übrigen verbunden, so erhalten wir $n(n-1)$ Complexionen. In diesen enthalten aber je zwei Verbindungen dieselben Elemente, wovon die eine der betreffenden Combinationsform entspricht, die andere aber die Permutation dieser Form ist; z. B. ab und ba, bc und cb rc. Man erhält darum nur die Hälfte des Produktes $n(n-1)$ Combinationen zur zweiten Klasse und es ist somit

$$\overset{2}{C}_n = \frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{n(n-1)}{2!}$$

oder nach einer anderen Bezeichnungsweise:

$$\overset{2}{C}_n = \binom{n}{2}.$$

3) Verbindet man jede dieser $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Complexionen mit den noch übrigen (n—2) Elementen, so erhält man im Ganzen $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2}$ Complexionen, in welchen je drei dieselben Elemente in anderer Ordnung enthalten. Die Anzahl der Combinationen von n Elementen zur dritten Klasse ist somit nur der dritte Theil der Anzahl jener Complexionen, daher

$$\overset{3}{C}_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

oder auch:

$$\overset{3}{C}_n = \binom{n}{3}.$$

4) In analoger Weise findet man

$$\overset{4}{C}_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} = \binom{n}{4}$$

und allgemein für die Anzahl der Combinationen von n Elementen zur mten Klasse:

$$\overset{m}{C}_n = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ldots\ (n-(m-1))}{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots\ldots m} = \binom{n}{m}.$$

Zusätze.

1) Da

$$\frac{n(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ (n-(m-1))}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots m} = \frac{n!}{m!\ (n-m)!}$$

so können wir statt der obigen Gleichung auch schreiben:

$$\overset{m}{C}_n = \frac{P_n}{P_m\ .\ P_{n-m}} = P_{\frac{n}{m,n-m}}$$

2) Da aber auch

$$\overset{n-m}{C}_n = \frac{n!}{(n-m)!\ [n-(n-m)]!} = \frac{n!}{(n-m)!\ m!} = P_{\frac{n}{m,n-m}}$$

so folgt:

$$\overset{m}{C}_n = \overset{n-m}{C}_n.$$

So ist z. B. $\overset{10}{C}_{14} = \overset{4}{C}_{14} = \frac{14.13.12.11}{1.2.3.4} = 1001.$

Anmerkungen. 1) Die Richtigkeit des im zweiten Zusatze ausgesprochenen Satzes ergibt sich auch unmittelbar aus der Betrachtung, daß jeder Combination von n Elementen zur mten Klasse eine Combination der noch übrigen n—m Elemente zur (n—m)ten Klasse entspricht und umgekehrt.

2) Für m = 0 erhält man $\overset{0}{C}_n = \overset{n}{C}_n = 1$.

Beispiele.

1) Wie viel Combinationen ohne Wiederholung zur 4ten Klasse sind mit den Elementen abcdef möglich?

Auflösung.

$$\overset{4}{C}_6 = \binom{6}{4} = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15.$$

Anmerkung. Nach obigem Zusatze ist auch

$$\overset{4}{C}_6 = \overset{6-4}{C}_6 = \overset{2}{C}_6 = \frac{6.5}{1.2} = 15, \text{ wie vorhin.}$$

2) Auf wie viel Arten lassen sich 20 Nummern zu je 5 ziehen?

Auflösung.

$$\overset{5}{C}_{20} = \binom{20}{5} = \frac{20.19.18.17.16}{1.2.3.4.5} = 15504 \text{ Arten.}$$

3) Auf wie viel Arten lassen sich 16 Kugeln in 2 Haufen theilen, von welchen der eine 6, der andere 10 Kugeln enthält?

Auflösung.

$$\overset{6}{C}_{16} = \overset{10}{C}_{16} = \binom{16}{6} = \frac{16.15.14.13.12.11}{1.2.3.4.5.6} = 8008 \text{ Arten.}$$

4) Auf wie viel Arten lassen sich 20 Kugeln in 3 Haufen theilen, von welchen der eine 5, der andere 7 und der dritte 8 Kugeln enthält?

Auflösung.

Denkt man sich zuerst 2 Haufen von 5 und 15 Kugeln, so erhält man $\overset{5}{C}_{20}$ Arten, der Haufen von 15 Kugeln kann aber

wieder auf $\overset{7}{C}_{15}$ Arten in zwei andere von 7 und 8 Kugeln zerlegt werden. Im Ganzen erhält man somit

$$\overset{5}{C}_{20} \cdot \overset{7}{C}_{15} = 99768240 \text{ Arten.}$$

b) Combinationen mit Wiederholung.

Sind

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots . a_n \ldots . (1)$$

n Elemente und kommen noch (m—1) andere Elemente

$$b_1, b_2, b_3, b_4 \ldots b_{m-1} \ldots (2)$$

hinzu, so bestehen die Combinationen sämmtlicher $(n+m-1)$ Elemente zur mten Klasse ohne Wiederholung:

1) aus den Combinationen der n Elemente (1) zur mten Klasse,

2) aus den Verbindungen einer jeden Complexion der Combinationen der (m—1) Elemente (2) zur ersten Klasse, mit sämmtlichen Combinationen der n Elemente (1) zur (m—1)ten Klasse,

3) aus den Verbindungen einer jeden Complexion der Combinationen der (m—1) Elemente (2) zur zweiten Klasse mit sämmtlichen Combinationen der n Elemente (1) zur (m—2)ten Klasse,

4) aus den Verbindungen einer jeden Complexion der Combinationen der (m—1) Elemente (2) zur dritten Klasse mit sämmtlichen Combinationen der n Elemente (1) zur (m—3)ten Klasse u. s. w.

Es ist somit die Combinationszahl

$$\overset{m}{C}_{n+m-1} = \overset{m}{C}_n + \overset{1}{C}_{m-1}\overset{m-1}{C}_n + \overset{2}{C}_{m-1}\overset{m-2}{C}_n + \overset{3}{C}_{m-1}\overset{m-3}{C}_n + \ldots$$
$$\ldots + \overset{m-3}{C}_{m-1}\overset{3}{C}_n + \overset{m-2}{C}_{m-1}\overset{2}{C}_n + \overset{m-1}{C}_{m-1}\overset{1}{C}_n.$$

Setzt man in dieser Gleichung der Reihe nach

$$m = 2, 3, 4, 5, \ldots .$$

so ergibt sich:

$$\overset{2}{C}_{n+1} = \overset{2}{C}_n + \overset{1}{C}_n$$
$$\overset{3}{C}_{n+2} = \overset{3}{C}_n + \overset{1}{C}_2\overset{2}{C}_n + \overset{1}{C}_n$$
$$\overset{4}{C}_{n+3} = \overset{4}{C}_n + \overset{1}{C}_3\overset{3}{C}_n + \overset{2}{C}_3\overset{2}{C}_n + \overset{1}{C}_n$$
$$\overset{5}{C}_{n+4} = \overset{5}{C}_n + \overset{1}{C}_4\overset{4}{C}_n + \overset{2}{C}_4\overset{3}{C}_n + \overset{3}{C}_4\overset{2}{C}_n + \overset{1}{C}_n$$

. . . .

. . . .

oder nach §. 9:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{2}{C}_{n+1} = \overset{2}{C}_n + n \\ \overset{3}{C}_{n+2} = \overset{3}{C}_n + 2\overset{2}{C}_n + n \\ \overset{4}{C}_{n+3} = \overset{4}{C}_n + 3\overset{3}{C}_n + 3\overset{2}{C}_n + n \\ \overset{5}{C}_{n+4} = \overset{5}{C}_n + 4\overset{4}{C}_n + 6\overset{3}{C}_n + 4\overset{2}{C}_n + n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \ldots (3)$$

Nun besteht aber die zweite Klasse der Combinationen mit Wiederholung der n Elemente (1):

1) aus den Combinationen dieser n Elemente zur zweiten Klasse ohne Wiederholung, wie z. B.

$$a_1\, a_2,\; a_1\, a_3,\; \ldots\; a_2\, a_3,\; a_2\, a_4,\; \ldots\; a_{n-1}\, a_n;$$

2) aus den Complexionen

$$a_1\, a_1,\; a_2\, a_2,\; a_3\, a_3,\; a_4\, a_4,\; \ldots\; a_n\, a_n.$$

Die Anzahl dieser letzten ist aber offenbar übereinstimmend mit der Anzahl der Combinationen jener n Elemente zur ersten Klasse ohne Wiederholung und es ist daher

$$\overset{2}{C'}_n = \overset{2}{C}_n + n$$

oder nach den Gleichungen (3):

$$\overset{2}{C'}_n = \overset{2}{C}_{n+1}.$$

Ebenso besteht die dritte Klasse der Combinationen mit Wiederholung der n Elemente (1):

1) aus den Combinationen dieser n Elemente zur dritten Klasse ohne Wiederholung, wie z. B.

$$a_1\, a_2\, a_3,\; a_1\, a_2\, a_4,\; \ldots\; a_2\, a_3\, a_4,\; a_2\, a_3\, a_5,\; \ldots\; a_{n-2}\, a_{n-1}\, a_n;$$

2) aus $2\overset{2}{C}_n$ Complexionen von der Form $\alpha^2\beta$, z. B.

$$a_1\, a_1\, a_2,\; a_1\, a_1\, a_3,\; \ldots\; a_1\, a_2\, a_2,\; a_1\, a_3\, a_3,\; \ldots\; a_{n-1}a_{n-1}a_n,\; a_{n-1}a_n a_n$$

3) aus n Complexionen von der Form α^3, z. B.

$$a_1\, a_1\, a_1,\; a_2\, a_2\, a_2,\; \ldots\; a_n\, a_n\, a_n.$$

Es ist demnach

$$\overset{3}{C'}_n = \overset{3}{C}_n + 2\overset{2}{C}_n + n$$

oder nach den Gleichungen (3)

$$C'^3_n = C^3_{n+2}.$$

Analog ergibt sich, daß die vierte Klasse der Combinationen mit Wiederholung der n Elemente (1) besteht:

1) aus den Combinationen dieser n Elemente zur vierten Klasse ohne Wiederholung; z. B.

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4,\ a_1\ a_2\ a_3\ a_5,\ \ldots\ a_{n-3}\ a_{n-2}\ a_{n-1}\ a_n;$

2) aus $3\overset{3}{C}_n$ Complexionen von der Form $\alpha^2\beta\gamma$, z. B.

$a_1\ a_1\ a_2\ a_3,\ \ldots\ a_1\ a_2\ a_2\ a_3,\ \ldots\ a_1\ a_2\ a_3\ a_3,\ \ldots\ a_{n-2}a_{n-2}a_{n-1}a_n,\ \ldots\ a_{n-2}\ a_{n-1}\ a_n\ a_n;$

3) aus $\overset{2}{C}_n$ Complexionen von der Form $\alpha^2\beta^2$, z. B.

$a_1\ a_1\ a_2\ a_2,\ \ldots\ a_2\ a_2\ a_3\ a_3,\ \ldots\ a_{n-1}\ a_{n-1}\ a_n\ a_n;$

4) aus $2\overset{2}{C}_n$ Complexionen von der Form $\alpha^3\beta$, z. B.

$a_1\ a_1\ a_1\ a_2,\ \ldots\ a_1\ a_2\ a_2\ a_2,\ \ldots\ a_{n-1}a_{n-1}a_{n-1}a_n,\ \ldots\ a_{n-1}a_na_na_n;$

5) aus n Complexionen von der Form α^4, z. B.

$a_1\ a_1\ a_1\ a_1,\ a_2\ a_2\ a_2\ a_2,\ \ldots\ a_{n-1}\ a_{n-1}\ a_{n-1}\ a_{n-1},\ a_n\ a_n\ a_n\ a_n.$

Man hat also:

$$\overset{4}{C'}_n = \overset{4}{C}_n + 3\overset{3}{C}_n + \overset{2}{C}_n + 2\overset{2}{C}_n + n$$
$$= \overset{4}{C}_n + 3\overset{3}{C}_n + 3\overset{2}{C}_n + n$$

oder nach den Gleichungen (3)

$$\overset{4}{C'}_n = \overset{4}{C}_{n+3}.$$

Die fünfte Klasse der Combinationen mit Wiederholung von n Elementen besteht:

1) aus $\overset{5}{C}_n$ Complexionen von der Form $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$;

2) aus $4\overset{4}{C}_n$ Complexionen von der Form $\alpha^2\beta\gamma\delta$;

3) aus $3\overset{3}{C}_n$ Complexionen von der Form $\alpha^2\beta^2\gamma$;

4) aus $3\overset{3}{C}_n$ Complexionen von der Form $\alpha^3\beta\gamma$;

5) aus $2\overset{2}{C}_n$ Complexionen von der Form $\alpha^3\beta^2$;

6) aus $2\overset{2}{C}_n$ Complexionen von der Form $\alpha^4\beta$;

7) aus n Complexionen von der Form α^5.

Man hat somit:

$$\overset{5}{C'}_n = \overset{5}{C}_n + 4\overset{4}{C}_n + 3\overset{3}{C}_n + 3\overset{3}{C}_n + 2\overset{2}{C}_n + 2\overset{2}{C}_n + n$$
$$= \overset{5}{C}_n + 4\overset{4}{C}_n + 6\overset{3}{C}_n + 4\overset{2}{C}_n + n$$

oder nach den Gleichungen (3)

$$C'^{5}_{n} = C^{5}_{n+4}$$

u. s. w.

Schreiben wir der besseren Uebersicht wegen die gewonnenen Resultate nochmals zusammen, so erhalten wir also die Beziehungen:

$$\overset{2}{C'}_{n} = \overset{2}{C}_{n+1}$$
$$\overset{3}{C'}_{n} = \overset{3}{C}_{n+2}$$
$$\overset{4}{C'}_{n} = \overset{4}{C}_{n+3}$$
$$\overset{5}{C'}_{n} = \overset{5}{C}_{n+4}$$

. . .

. . .

. . .

woraus wir schließen, daß allgemein sein wird:

$$\overset{m}{C'}_{n} = \overset{m}{C}_{n+m-1},$$

d. h. die Anzahl der Combinationen von n Elementen mit Wiederholung zur mten Klasse ist gleich der Anzahl der Combinationen von (n+m—1) Elementen ohne Wiederholung zur mten Klasse.

Nach §. 9. 4. ist demnach

$$\overset{m}{C'}_{n} = \frac{(n+m-1)\,(n+m-1-1)\ldots.[n+m-1-(m-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots.\,m}$$

oder, wenn man die Faktoren des Zählers in umgekehrter Ordnung anschreibt,

$$\overset{m}{C'}_{n} = \frac{n(n+1)\,(n+2)\,\ldots.\,[n+(m-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,m},$$

oder auch

$$\overset{m}{C'}_{n} = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}$$

○ Anmerkung: Zu der allgemeinen Giltigkeit dieses Resultates werden wir auch durch folgende Betrachtung geführt.

Es seien

$$1, 2, 3, 4, \ldots.\, n$$

n gegebene Elemente, für welche die Anzahl der Combinationen mit Wiederholung zur mten Klasse bestimmt werden soll.

Denkt man sich alle diese Combinationen gebildet und ist z. B.

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \ldots\ a_m$$

irgend eine solche, so ist zunächst klar, daß die Beziehungen stattfinden:

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{m-1} \leqq a_m.$$

Verändert man nun sämmtliche Combinationsformen von $\overset{m}{C'_n}$ in der Weise, daß man zum

2, 3, 4, 5, ... mten Gliede

der Reihe nach

1, 2, 3, 4, ... (m—1)

addirt, so daß also z. B. obige Combinationsform

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \ldots\ a_m \ldots\ldots\ (1)$$

übergeht in

$$a_1\ (a_2+1)\ (a_3+2)\ (a_4+3)\ \ldots\ (a_m+m-1)\ \ldots\ (2),$$

so haben die so veränderten Combinationen nachstehende Eigenschaften:

1) Sämmtliche Combinationsformen sind geordnet und enthalten keine Wiederholungen.

Denn da

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{m-1}$$

und $$0 < 1 < 2 < \cdots < (m-1),$$

so ist nach Thl. I, §. 20. 1 u. 3:

$$a_1 < (a_2 + 1) < (a_3 + 2) < \cdots < (a_{m-1} + m-1).$$

2) Keines der Elemente kann die Zahl (n+m—1) überschreiten.

Denn ist z. B. (a_x+x-1) irgend ein Element der Form (2), so hat man

$$a_x \leqq n$$

$$x \leqq m$$

oder $$(x-1) \leqq (m-1),$$

folglich: $$(a_x + x - 1) \leqq (n + m - 1.)$$

Die betreffende umgewandelte Combination ist demnach eine Combinationsform der Zahlen

1, 2, 3, ... n, n + 1, ... (n + m — 1)

zur mten Klasse ohne Wiederholung.

3) Sämmtliche Combinationsformen sind von einander verschieden.

Denn wären z. B. die zwei Combinationen

$$a_1\ (a_2 + 1)\ (a_3 + 2) \ldots\ldots (a_m + m - 1)$$
$$b_1\ (b_2 + 1)\ (b_3 + 2) \ldots\ldots (b_m + m - 1)$$

identisch, so müßte

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 \\ a_2 + 1 &= b_2 + 1 \\ a_3 + 2 &= b_3 + 2, \\ &\ \vdots \\ a_m + m - 1 &= b_m + m - 1, \end{aligned}$$

also auch

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 \\ a_2 &= b_2 \\ a_3 &= b_3 \\ &\ \vdots \\ a_m &= b_m \end{aligned}$$

sein. Dann wären aber auch die zwei Combinationen

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots\ldots a_m$$

und

$$b_1\ b_2\ b_3\ b_4 \ldots\ldots b_m$$

identisch, was der Annahme widersprechen würde.

4) Jede Combination der Elemente

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots (n + m - 1)$$

zur mten Klasse ohne Wiederholung geht aus einer Combination der n Elemente

$$1, 2, 3, 4 \ldots\ldots n$$

zur mten Klasse mit Wiederholung hervor.

Denn ist

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_m$$

eine Combination von $\overset{m}{C}_{n+m-1}$, so muß, da

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots\ldots < \alpha_m,$$

auch

$$\alpha_1 \leqq n$$

sein. Denn wäre

$$\alpha_1 > n,$$

so würde daraus folgen:

$$\alpha_2 > n + 1$$
$$\alpha_3 > n + 2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\alpha_x > n + x - 1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\alpha_m > n + m - 1,$$

was mit der Voraussetzung, daß α_m ein Glied der Reihe 1, 2, 3, .. n, .. n + m — 1 ist, im Widerspruche stünde.

Aus der Ungleichung

$$\alpha_1 \leqq n$$

fließen aber unmittelbar die Beziehungen:

$$\alpha_2 \leqq n + 1$$
$$\alpha_3 \leqq n + 2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

also allgemein

$$\alpha_x \leqq n + x - 1,$$

oder $\alpha_x - (x - 1) \leqq n.$

Da aber

$$\alpha_x \geqq x,$$

so ist $\alpha_x - (x - 1)$ stets positiv und somit
$\alpha_1 \, (\alpha_2 - 1) \, (\alpha_3 - 2) \ldots (\alpha_x - (x - 1)) \ldots (\alpha_m - (m - 1))$
eine Combination der Zahlen

$$1, 2, 3, 4, \ldots . n$$

zur mten Klasse. Dieselbe kann aber, da die Gleichung

$$\alpha_x - (x - 1) = \alpha_y - (y - 1)$$

oder $\alpha_x = \alpha_y + x - y$

möglich ist, eine Combinationsform mit Wiederholung sein. Aus ihr geht aber, auf die im Eingange angeführte Weise, die Combination

$$\alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3 \; \alpha_4 \ldots . \; \alpha_m$$

hervor.

Da also durch die angegebene Veränderung der ursprünglichen Combinationen aus jeder Combination der n Elemente

$$1, 2, 3, 4, \ldots. n$$

zur mten Klasse **mit** Wiederholung eine Combination der Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots. n + m - 1$$

zur mten Klasse **ohne** Wiederholung erhalten wird, und umgekehrt jede Combination der Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots. n + m - 1$$

zur mten Klasse **ohne** Wiederholung aus einer und nur **einer** bestimmten Combinationsform der Zahlen

$$1, 2, 3, 4, \ldots. n$$

zur mten Klasse **mit** Wiederholung hervorgeht, so müssen die Combinationszahlen beider einander gleich sein.

Man erhält demnach wie oben:

$$\overset{m}{C'}_n = \overset{m}{C}_{n+m-1}$$
$$= \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,\ldots.\,[n+(m-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,m}.$$

Beispiele.

1) Wie viel Combinationsformen zur vierten Klasse mit Wiederholung lassen die Elemente abcdef zu?

Auflösung.

$$\overset{4}{C'}_6 = \frac{6\,.\,7\,.\,8\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 126,$$

oder: $\overset{4}{C}_6 = \overset{4}{C'}_{6+4-1} = \overset{4}{C}_9 = \frac{9\,.\,8\,.\,7\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 126.$

2) Man soll $\overset{5}{C'}_8$ und $\overset{3}{C'}_7$ bestimmen.

Auflösung.

$$\overset{5}{C'}_8 = \frac{8.9.10.11.12}{1.2.3.4.5} = 792,$$

$$\overset{3}{C'}_7 = \frac{7\,.\,8\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3} = 84,$$

oder: $\overset{5}{C'}_8 = \overset{5}{C}_{8+5-1} = \overset{5}{C}_{12} = \frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5} = 792,$

$$\overset{3}{C'}_7 = \overset{3}{C}_{7+3-1} = \overset{3}{C}_9 = \frac{9\,.\,8\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3} = 84.$$

c) Anzahl der Combinationen mit beschränkter Wiederholung.

Obgleich sich kein allgemeiner Ausdruck für die Anzahl der Combinationen mit beschränkter Wiederholung zu einer bestimmten Klasse angeben läßt, so sind wir doch im Stande, einen solchen für die Anzahl aller Combinationsformen in allen verschiedenen Klassen zu entwickeln.

Es seien zu diesem Ende

$$a^\alpha,\ b^\beta,\ c^\gamma,\ d^\delta,\ \ldots.\ n^\nu$$

die zu combinirenden Elemente, wo also α, β, γ, δ, ... ν andeuten, wie vielmal die betreffenden Elemente in den verschiedenen Complexionen auftreten dürfen.

Denken wir uns nun die Reihen

$$\begin{array}{l} 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots. + a^\alpha \\ 1 + b + b^2 + b^3 + \ldots. + b^\beta \\ 1 + c + c^2 + c^3 + \ldots. + c^\gamma \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 + n + n^2 + n^3 + \ldots. + n^\nu \end{array}$$

mit einander multiplicirt, so erhalten wir in den Gliedern des Produktes, wenn wir von demjenigen Gliede, welches durch Multiplication der ersten Glieder der Reihen hervorgegangen ist, absehen, sämmtliche Combinationsformen, welche aus obigen Elementen zu allen verschiedenen Klassen gebildet werden können.

Setzen wir daher

$$a = b = c = d = \ldots. = n = 1,$$

so geht jedes Glied dieses Produktes in 1 über und die Summe aller Produktenglieder ist alsdann um 1 größer als die Anzahl der Glieder. Diese ist somit

$$= (\alpha+1)\ (\beta+1)\ (\gamma+1)\ (\delta+1)\ \ldots. - 1.$$

Zusätze.

1) Wird

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \ldots. = \nu,$$

so geht die Anzahl der Combinationen über in

$$(\alpha+1)^n - 1.$$

2) Für

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \ldots\ldots = \nu = 1$$

erhält man für die Anzahl:

$$(1 + 1)^n - 1 = 2^n - 1.$$

Anmerkung. Für die Anzahl der Combinationen zu einer bestimmten Quersumme lassen sich keine allgemeinen Formeln aufstellen.

§. 10. Aufgaben zur Uebung.

1) Bildet die Combinationen ohne Wiederholung:

a) von abcdefg zur vierten Klasse;
b) von 1234567 zur fünften Klasse;
c) von 123456789 zur siebenten Klasse.

2) Die Combinationen mit Wiederholung zu bilden:

a) von abcdf zur dritten Klasse;
b) von abc zur fünften Klasse;
c) von 1234 zur vierten Klasse.

3) Man soll mit beschränkter Wiederholung combiniren:

a) $\overset{5}{C}(a^2b^3c^2d)$; b) $\overset{4}{C}(1234)^2$.

4) Die aufeinander folgenden Zahlen unserer Zahlenreihe

a) zur Summe 9 zur vierten Klasse,
b) „ „ 12 „ fünften „
c) „ „ 14 „ dritten „

zu combiniren.

5) Welche fünfziffrige Zahlen lassen sich mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 bilden, wenn jede dieser Ziffern nur einmal in der Zahl vorkommen und keine Ziffer von kleinerem Werthe nach einer solchen von größerem Werthe stehen darf?

6) Wie groß ist die Anzahl dieser Combinationen ohne Wiederholung von 10 Elementen a) zur zweiten, b) zur dritten, c) zur vierten, d) zur fünften, e) zur sechsten Klasse?

7) Wie viel Combinationen mit Wiederholung lassen die Elemente abcdefgh a) zur dritten, b) zur fünften, c) zur siebenten Klasse zu?

8) Berechnet die Anzahl der Unionen, Binionen (Amben), Ternen, Quaternen und Quinten, welche in 90 Numern enthalten sind.

9) Wie viel Spiele kann eine von 4 Personen bei einem Piquetspiele von 32 Blättern möglicherweise erhalten, wenn jede

Person 4 Karten bekommt und wie viel verschiedene Spiele lassen sich unter die vier Personen austheilen?

10) Auf wie viel Arten können von 50 in einer Urne befindlichen Numern 4 gezogen werden?

11) Wie viel mal lassen sich 40 mit verschiedenen Zeichen versehene Kugeln in zwei Haufen abtheilen, von welchen der eine 15, der andere 25 Kugeln enthält?

12) 30 der Reihe nach numerirte Kugeln sind in 3 Haufen von 10, 12 und 8 Stück abzutheilen. Auf wie viel Arten kann dieses geschehen?

13) Unter n mit verschiedenen Numern versehenen Kugeln befinden sich n′ von besonderer Farbe; wenn man nun sämmtliche n Kugeln zu je m combinirt, so erhält man wie viel Verbindungen, in welchen sich m′ der besonders durch ihre Farbe ausgezeichneten Kugeln befinden?

14) Von zwei Spielern, welche mit einer Piquetkarte von 32 Blättern spielen, erhält jeder 4 Karten; wie viel Spiele kann einer derselben a) mit 2 Coeurs; b) mit 4 Coeurs; c) ohne Coeurs bekommen?

15) Wie viel verschiedene Würfe sind mit 2 Würfeln möglich?

16) Mit drei Würfeln können wie viel verschiedene Würfe gemacht werden?

C. Das Variiren.

§. 11. Erklärungen.

1) Werden die Combinationen gegebener Elemente nochmals permutirt, so erhält man die Variationen der betreffenden Klasse eben dieser Elemente. Jede der erhaltenen Complexionen heißt eine Variationsform oder kurzhin eine Variation.

2) Man unterscheidet, ähnlich wie bei den Combinationen, Variationen ohne und mit Wiederholung.

3) Die Aufgabe, daß n Elemente a, b, c, ... zur mten Klasse variirt werden sollen, deutet man an durch

$$\overset{m}{V}(abc\ldots),\ \text{oder}\ \overset{m}{V}'(abc\ldots)$$



je nachdem bezüglich die Complexionen ohne, oder mit Wiederholung gebildet werden sollen. Die Variationszahl selbst wird alsdann bezüglich bezeichnet durch

V_n oder V'_n.

§. 12. Bildung der Variationen.

a) Variationen ohne Wiederholung.

1) Um die erste Klasse zu bilden, schreibe man die gegebenen Elemente der natürlichen Ordnung nach an.

2) Die zweite Klasse wird erhalten, wenn man jedes Element mit allen übrigen verbindet.

So ist z. B.

$$\overset{2}{V}(abcd) = \begin{cases} ab & ba & ca & da \\ ac & bc & cb & db \\ ad & bd & cd & dc. \end{cases}$$

3) Setzt man jedes Element allen Complexionen der zweiten Klasse, welche dieses Element nicht enthalten, voran, so erhält man die Variationen der dritten Klasse. Z. B.

$$\overset{3}{V}(abcd) = \begin{cases} abc & bac & cab & dab \\ abd & bad & cad & dac \\ acb & bca & cba & dba \\ acd & bcd & cbd & dbc \\ adb & bda & cda & dca \\ adc & bdc & cdb & dcb. \end{cases}$$

4) Analog werden die Variationen der übrigen Klassen gebildet.

b) Variationen mit Wiederholung.

1) Die Elemente in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge liefern die erste Klasse.

2) Verbindet man jedes der vorgelegten Elemente mit jedem derselben, so gelangt man zur zweiten Klasse. Z. B.

$$\overset{2}{V}'(abcd) \quad \begin{cases} aa & ba & ca & da \\ ab & bb & cb & db \\ ac & bc & cc & dc \\ ad & bd & cd & dd. \end{cases}$$

3) Setzt man jeder Complexion der zweiten Klasse jedes der gegebenen Elemente vor, so erhält man die Variationen der dritten Klasse.

So ist z. B.

$$\overset{3}{V}'(abcd) = \left\{ \begin{array}{llll} aaa & baa & caa & daa \\ aab & bbb & cab & dab \\ aac & bac & cac & dac \\ aad & bad & cad & dad \\ aba & bba & cba & dba \\ abb & bbb & cbb & dbb \\ abc & bbc & cbc & dbc \\ abd & bbd & cbd & dbd \\ aca & bca & cca & dca \\ acb & bcb & ccb & dcb \\ acc & bcc & ccc & dcc \\ acd & bcd & ccd & dcd \\ ada & bda & cda & dda \\ adb & bdb & cdb & ddb \\ adc & bdc & cdc & ddc \\ add & bdd & cdd & ddd \end{array} \right.$$

4) Aehnlich werden die übrigen Klassen gebildet.

c) Variationen zu einer bestimmten Quersumme.

1) Um die Variationen zu einer bestimmten Quersumme zu bilden, combinire man die vorgelegten Elemente zu dieser Summe, permutire hierauf jede der erhaltenen Complexionen und ordne solche in der Weise, daß die durch sie ausgedrückten Zahlen in aufsteigender Ordnung nach einander folgen.

So findet man z. B. für die Elemente 1, 2, 3, ... die Combinationen ohne Wiederholung der dritten Klasse zur Quersumme 9:

126, 135, 234,

und hieraus durch Permutation und Ordnen nach dem dekadischen Werthe der Complexionen die entsprechenden Variationen:

126	243	423
135	261	432
153	315	513
162	324	531
216	342	612
234	351	621.

Ebenso hat man z. B. für die Combinationen **mit Wiederholung** zur dritten Klasse zur Quersumme 6:

114, 123, 222

also für die entsprechenden Variationen:

114 132 213 231 321
123 141 222 312 411.

§. 13. Anzahl der Variationen.

a) Variationen ohne Wiederholung.

1) Sind n Elemente zur mten Klasse ohne Wiederholung zu **variiren**, so hat man nach Obigem jede der Complexionen der Combinationen von n Elementen zur mten Klasse nochmals zu permutiren. Es wird daher die Anzahl der Variationsformen für n Elemente zur mten Klasse

$$\overset{m}{V}_n = \overset{m}{C}_n \,.\, P_m$$

$$= \frac{n(n-1)\,(n-2)\,\ldots .\,[n-(m-1)]}{m!}\,.\,m!$$

$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots .\,[n-(m-1)].$$

Anmerkung. Zu demselben Resultate gelangt man auch durch folgende Betrachtung:

Die erste Variationsklasse wird durch die n gegebenen Elemente gebildet. Setzt man nun jedes derselben den noch (n—1) übrigen Elementen vor, so erhält man die Variationen zur zweiten Klasse. Es ist daher deren Anzahl

$$\overset{2}{V}_n = n\,(n-1).$$

Setzt man nun wieder jede dieser Complexionen jedem der noch übrigen (n—2) Elemente vor, so bekommt man die Variationen zur dritten Klasse. Für die Anzahl derselben folgt somit

$$\overset{3}{V}_n = n\,(n-1)\;n-2).$$

Allgemein wird demnach sein:

$$\overset{m}{V}_n = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots .\,[n-(m-1)].$$

Beispiele.

1) Auf wie viel Arten lassen sich die Elemente abcdefg zur fünften Klasse ohne Wiederholung variiren?

Auflösung.

$$\overset{5}{V}_7 = 7.6.5.4.3 = 2520 \text{ Arten.}$$

2) Wie viel Variationen ohne Wiederholung zur dritten Klasse lassen die Elemente mnpqrstu zu?

Auflösung.

$$\overset{3}{V}_8 = 8.7.6 = 336 \text{ Variationen.}$$

b) Variationen mit Wiederholung.

n Elemente zur ersten Klasse geben n Complexionen. Wird nun jedes dieser Elemente mit allen verbunden, so erhält man $n \cdot n = n^2$ Variationsformen für die zweite Klasse, oder

$$\overset{2}{V'}_n = n^2.$$

Da nun, zur Bildung der dritten Klasse, jede Complexion der zweiten Klasse wieder mit allen Elementen verbunden wird, so erhält man für die Anzahl der Variationsformen von n Elementen

$$\overset{3}{V'}_n = n^3.$$

Allgemein ist somit die Anzahl der Variationsformen von n Elementen mit Wiederholung zur m ten Klasse

$$\overset{m}{V'}_n = n^m.$$

Beispiele.

1) Man soll $\overset{4}{V'}_7$ und $\overset{5}{V'}_4$ berechnen!

Auflösung.

$$\overset{4}{V'}_7 = 7^4 = 2401.$$
$$\overset{5}{V'}_4 = 4^5 = 1024.$$

2) Auf wie viel Arten lassen sich die Buchstaben abcde zur dritten Klasse mit Wiederholung variiren?

Auflösung.

$$\overset{3}{V'}_5 = 5^3 = 125 \text{ Arten.}$$

3) Wie viel Würfe sind mit 3 Würfeln möglich?

Auflösung.

$$\overset{3}{V}_6 = 6^3 = 216 \text{ Würfe.}$$

c) Anzahl der Variationen zu einer bestimmten Quersumme.

Um die Anzahl aller Variationen zu einer bestimmten Quersumme zu finden, bilde man die Combinationen mit Wiederholung

zu dieser Quersumme und addire hierauf die Permutationszahlen sämmtlicher erhaltenen Combinationsformen.

Beispiel.

Wie viel Würfe sind mit drei Würfeln möglich, so daß die Summe der Augen 14 beträgt?

Auflösung.

Die Combinationen mit Wiederholung der Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6 zur dritten Klasse und zur Quersumme 14 sind:

266, 356, 446, 455

und die entsprechenden Permutationszahlen

3, 6, 3, 3,

folglich ist die Anzahl der möglichen Würfe

$$= 3 + 6 + 3 + 3 = 15.$$

§. 14. Aufgaben zur Uebung.

1) Bildet die Variationen ohne Wiederholung von 1, 2, 3, 4 a) zur zweiten, b) zur dritten Klasse.

2) Man soll die Elemente abcdf zur vierten Klasse ohne Wiederholung variiren.

3) Variirt die Elemente 1, 2, 3, 4 mit Wiederholung a) zur zweiten b) zur dritten Klasse!

4) Wie viel vierziffrige Zahlen lassen sich angeben, in welchen einzelne der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 nur einmal vorkommen?

5) Auf wie viel Arten lassen sich die Elemente abcdefg zur vierten Klasse mit Wiederholung variiren?

6) Wie viel Würfe sind a) mit 2, b) mit 3, c) mit 4, d) mit 5, e) mit 6 Würfeln möglich?

7) Wie viel Partialprodukte liefert $(a+b+c+d+e)^3$?

8) Auf wie viel Arten lassen sich 6 schwarze, 4 weiße und drei gelbe Kugeln so zu Haufen von je 3 Kugeln gruppiren, daß von diesen jede von einer anderen Farbe ist?

9) Wie viel Theiler hat eine Zahl, welche durch die Multiplication der n einfachen Faktoren a, b, c, ... hervorgegangen ist, wenn die Einheit, sowie die Zahl selbst zu den Theilern gerechnet werden?

10) Wie viel Theiler hat die Zahl 2310, wenn die Einheit und die Zahl 2310 selbst zu den Theilern gerechnet werden?

11) Wie groß ist die Anzahl der Theiler einer Zahl, welche durch die Faktoren a^α, b^β, c^γ, d^δ, e, f und g gebildet wird, wo die Grundzahlen der Potenzen Primzahlen sind, wenn die Einheit, sowie die Zahl selbst zu den Theilern gezählt werden?

12) Wie viel Theiler enthält die Zahl 415800 mit Einschluß der Einheit und der Zahl selbst?

Zweiter Abschnitt.

Der binomische Satz.

---

a) Für ganze positive Exponenten.

§. 15. Entwickelung der Binomialreihe.

Erste Herleitung.

1) Multiplicirt man der Reihe nach 2, 3, 4, 5, ... n der Binomien

$$(a+x),\ (b+x),\ (c+x),\ (d+x),\ \ldots$$

welche ein Glied x gemeinschaftlich haben, mit einander und ordnet die Produkte nach steigenden Potenzen jenes Gliedes x, so erhält man:

$$(a + x)(b + x) = ab + (a + b)x + x^2.$$

$$(a + x)(b + x)(c + x) = abc + (ab + ac + bc)x + (a + b + c)x^2 + x^3.$$

$$(a + x)(b + x)(c + x)(d + x) = abcd + (abc + abd + acd + bcd)x + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 + (a + b + c + d)x^3 + x^4.$$

$$(a + x)(b + x)(c + x)(d + x)(e + x) = abcde + (abcd + abce + abde + acde + bcde)x + (abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde)x^2 + (ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de)x^3 + (a + b + c + d + e)x^4 + x^5$$

u. s. w.

Aus dem Bildungsgesetze dieser Produkte ersieht man sofort, daß, wenn allgemein die Summe aller durch die einzelnen Complexionen der Combination ohne Wiederholung der n Elemente

3*

a, b, c, ... r zur m ten Klasse ausgedrückten $\binom{n}{m}$ Produkte kurzhin durch $\Sigma\overset{m}{C}(abcd\ldots r)$ bezeichnet wird, man auch schreiben kann:

$$(a+x)(b+x) = \Sigma\overset{2}{C}(ab) + \Sigma\overset{1}{C}(ab)x + x^2.$$

$$(a+x)(b+x)(c+x) = \Sigma\overset{3}{C}(abc) + \Sigma\overset{2}{C}(abc)x + \Sigma\overset{1}{C}(abc)x^2 + x^3.$$

$$(a+x)(b+x)(c+x)(d+x) = \Sigma\overset{4}{C}(abcd) + \Sigma\overset{3}{C}(abcd)x + \Sigma\overset{2}{C}(abcd)x^2 + \Sigma\overset{1}{C}(abcd)x^3 + x^4$$

$$(a+x)(b+x)(c+x)(d+x)(e+x) = \Sigma\overset{5}{C}(abcde) + \Sigma\overset{4}{C}(abcde)x + \Sigma\overset{3}{C}(abcde)x^2 + \Sigma\overset{2}{C}(abcde)x^3 + \Sigma\overset{1}{C}(abcde)x^4 + x^5$$

u. s. w.

Nehmen wir nun an, das in vorstehenden Gleichungen klar ausgesprochene Gesetz in Betreff der Bildung der Produkte gelte für n Binomialfaktoren, es sei also

$$\left.\begin{aligned} &\overbrace{(a+x)}^{1}\overbrace{(b+x)}^{2}\overbrace{(c+x)}^{3}\ldots\overbrace{(r+x)}^{n} = \Sigma\overset{n}{C}(abc\ldots r) + \\ &\Sigma\overset{n-1}{C}(abc\ldots r)x + \Sigma\overset{n-2}{C}(abc\ldots r)x^2 + \ldots + \\ &\Sigma\overset{2}{C}(abc\ldots r)x^{n-2} + \Sigma\overset{1}{C}(abc\ldots r)x^{n-1} + x^n \end{aligned}\right\}\ldots(1)$$

und man multiplicirt diese Gleichung noch mit einem weiteren Binomialfaktor (s + x), so geht dieselbe über in:

$$\left.\begin{aligned} &\overbrace{(a+x)}^{1}\overbrace{(b+x)}^{2}\overbrace{(c+x)}^{3}\ldots\overbrace{(r+x)}^{n}\overset{n+1}{(s+x)} = \\ &s\Sigma\overset{n}{C}(abc\ldots r) + [\Sigma\overset{n}{C}(abc\ldots r) + s\Sigma\overset{n-1}{C}(abc\ldots r)]x + \\ &[\Sigma\overset{n-1}{C}(abc\ldots r) + s\Sigma\overset{n-2}{C}(abc\ldots r)]x^2 + \ldots \\ &+ [\Sigma\overset{3}{C}(abc\ldots r) + s\Sigma\overset{2}{C}(abc\ldots r)]x^{n-2} \\ &+ [\Sigma\overset{2}{C}(abc\ldots r) + s\Sigma\overset{1}{C}(abc\ldots r)]x^{n-1} \\ &+ [\Sigma\overset{1}{C}(abc\ldots r) + s]\,x^n + x^{n+1} \end{aligned}\right\}\ldots(2)$$

Nun ist aber

$$s\Sigma\overset{n}{C}(abc\ldots r) = \Sigma\overset{n+1}{C}(abc\ldots rs)$$

$$\Sigma\overset{n}{C}(abc\ldots r) + s\Sigma\overset{n-1}{C}(abc\ldots r) = \Sigma\overset{n}{C}(abc\ldots rs)$$

$$\sum^{n-1} C(abc\ldots r) + s\sum^{n-2} C(abc\ldots r) = \sum^{n-1} C(abc\ldots rs)$$

$$\vdots$$

$$\sum^{m} C(abc\ldots r) + s\sum^{m-1} C(abc\ldots r) = \sum^{m} C(abc\ldots rs)$$

$$\vdots$$

$$\sum^{3} C(abc\ldots r) + s\sum^{2} C(abc\ldots r) = \sum^{3} C(abc\ldots rs)$$

$$\sum^{2} C(abc\ldots r) + s\sum^{1} C(abc\ldots r) = \sum^{2} C(abc\ldots rs)$$

$$\sum^{1} C(abc\ldots r) + s = a + b + c + \ldots + r + s = \sum^{1} C(abc\ldots rs).$$

Führen wir diese Werthe in die Gleichung (2) ein, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}&(a + x)(b + x)(c + x)\ldots(r + x)(s + x) = \\ &\quad \sum^{n+1} C(abc\ldots rs) + \sum^{n} C(abc\ldots rs)x + \sum^{n-1} C(abc\ldots rs)x^2 \\ &\quad + \ldots + \sum^{m} C(abc\ldots rs)x^{n-m+1} + \ldots + \sum^{2} C(abc\ldots rs)x^{n-1} \\ &\quad + \sum^{1} C(abc\ldots rs)x^n + x^{n+1}\end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

Durch Vergleichung der beiden Gleichungen (1) und (3) gelangen wir zu dem Schlusse, daß wenn das durch die Gleichung (1) ausgesprochene Bildungsgesetz für das Produkt von n Faktoren richtig ist, es auch für $(n + 1)$ solcher giltig sein muß. Nun hat aber, zufolge der im Eingange ausgeführten Beispiele, dieses Gesetz für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5 Giltigkeit, also auch nach dem eben Bewiesenen für $n = 5 + 1 = 6$, somit wieder für $n = 6 + 1 = 7$ u. s. f., also für jede beliebige Anzahl von Binomialfaktoren.

Setzen wir in der Gleichung (1) die nicht gemeinschaftlichen Glieder $a, b, c, \ldots r$ der n Binomialfaktoren sämmtlich gleich der Einheit, also

$$a = b = c = \ldots = r = 1,$$

so geht die linke Seite derselben über in:

$$\underbrace{(1 + x)}_{1}\underbrace{(1 + x)}_{2}\underbrace{(1 + x)}_{3}\ldots\underbrace{(1 + x)}_{n} = (1 + x)^n,$$

das Symbol $\overset{m}{\Sigma C}(abc...r)$ in die Combinationszahl

$$\overset{m}{C}_n = \binom{n}{m}$$

und man erhält:

$$\overset{n}{\Sigma C}(abc...r) = \overset{n}{C}_n = \binom{n}{n} = 1$$
$$\overset{n-1}{\Sigma C}(abc...r) = \overset{n-1}{C}_n = \binom{n}{n-1}$$
$$\overset{n-2}{\Sigma C}(abc...r) = \overset{n-2}{C}_n = \binom{n}{n-2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\overset{2}{\Sigma C}(abc...r) = \overset{2}{C}_n = \binom{n}{2}$$
$$\overset{1}{\Sigma C}(abc...r) = \overset{1}{C}_n = \binom{n}{1}.$$

Also wird

$$\left.\begin{array}{l}(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots \\ \quad + \binom{n}{m}x^m + \ldots + \binom{n}{n-2}x^{n-2} + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n\end{array}\right\} \ldots\ldots (4)$$

Diese Gleichung, welche das Gesetz ausdrückt, wie man ein Binom von der Form $(1 + x)$ zu jeder beliebigen ganzen positiven Zahl potenzirt, heißt der binomische Satz, die binomische Formel, oder auch nach ihrem ersten Begründer Newton, der Newton'sche Lehrsatz. Die zur rechten Seite des Gleichheitszeichens stehende Entwickelung der $n$ten Potenz des Binoms wird die Binomialreihe genannt und die Coefficienten ihrer einzelnen Glieder, wie

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots \binom{n}{m} \ldots$$

heißen deren Binomialcoefficienten.

Um dem binomischen Satze eine allgemeinere Form zu geben, setzen wir in Gleichung (4)

$$x = \frac{b}{a}$$

und erhalten alsdann:

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\left(\frac{b}{a}\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \ldots$$
$$+ \binom{n}{m}\left(\frac{b}{a}\right)^m + \ldots + \binom{n}{n-2}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} + \binom{n}{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

oder wenn man hierin

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = \left(\frac{a+b}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}\left(a+b\right)^n$$

setzt und hierauf beiderseits mit a^n multiplicirt:

$$\left.\begin{array}{l}(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \\ \quad + \binom{n}{m}a^{n-m}b^m + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n\end{array}\right\}\ldots (5)$$

Wird das zweite Glied des Binoms negativ genommen, so werden in den Gleichungen (4) und (5) alle geradstelligen Glieder der rechten Seite negativ und es gehen dieselben über in:

$$\left.\begin{array}{l}(1-x)^n = 1 - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \binom{n}{3}x^3 + \ldots \\ \quad \pm \binom{n}{m}x^m \mp \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mp \binom{n}{n-1}x^{n-1} \pm x^n\end{array}\right\}\ldots (6)$$

und

$$\left.\begin{array}{l}(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \\ \quad \pm \binom{n}{m}a^{n-m}b^m \mp \ldots \mp \binom{n}{n-1}ab^{n-1} \pm b^n\end{array}\right\}\ldots (7)$$

Durch den bloßen Anblick der Binomialreihen (5) und (7) erkennt man sogleich, daß selbst für die allgemeinere Form die Exponenten der beiden Potenzfaktoren eines beliebigen Gliedes der Reihe stets leicht angegeben werden können, indem der Exponent des zweiten Gliedes b des Binoms immer gleich dem um die Einheit verminderten Stellenzeiger des in Frage stehenden Gliedes ist und der Exponent des ersten Binomialgliedes a die Ergänzung des Exponenten von b zum Binomialexponenten n bildet; ferner, daß der betreffende Binomialcoefficient immer mit der Combinationszahl von so vielen Elementen als der Binomialexponent Einheiten hat, ohne Wiederholung zu der durch den Coefficienten des zweiten Binomialgliedes vorgezeichneten Klasse übereinstimmt.

Hiernach ist z. B. das achte Glied der Entwickelung von

$(a + b)^n = \overset{7}{C}_n\, a^{n-7}\, b^7 = \binom{n}{7} a^{n-7}\, b^7$,

das zwölfte Glied $= \overset{11}{C}_n\, a^{n-11} b^{11} = \binom{n}{11} a^{n-11} b^{11}$ u. s. w.

Zweite Herleitung.

Da der binomische Satz für viele der nachfolgenden Entwickelungen von der größten Wichtigkeit ist, so dürfte es nicht ungeeignet erscheinen, wenn wir nachstehend noch eine zweite kürzere Herleitung desselben anführen.

Bildet man die Glieder der Entwickelung des Produktes

$$(a + b)\,(a + b)$$

oder der Potenz

$$(a + b)^2$$

dadurch, daß man jedes Glied des Multiplicators vor jedes Glied des Multiplicanden schreibt, also

$$(a + b)^2 = aa + ab + ba + bb$$

setzt, so erhält man als Resultat sämmtliche Complexionen der Variationen der zwei Elemente a und b zur zweiten Klasse **mit** Wiederholung.

Da aber die Complexionen ab und ba, als Produkte betrachtet, einerlei Werthe haben und die Anzahl dieser gleichen Produkte mit der Permutationszahl von zwei Elementen übereinstimmt, so kann man auch setzen:

$$(a + b)^2 = a^2 + P_2\, ab + b^2.$$

Entwickelt man analog die **dritte** Potenz von $(a + b)$ und setzt

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)^2\,(a + b)\\ &= (aa + ab + ba + bb)\,(a + b)\\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb,\end{aligned}$$

so erhält man offenbar als Resultat sämmtliche Variationsformen der zwei Elemente a und b zur dritten Klasse **mit** Wiederholung. Von denselben stimmen aber die Complexionen

aab, aba, baa

und ebenso die Complexionen

abb, bab, bba,

als Produkt aufgefaßt, ihrem algebraischen Werthe nach vollkommen überein und jeder dieser Werthe tritt so viel mal auf, als die Permutationszahlen der Elemente a, a, b und a, b, b angeben.

Man kann daher auch schreiben:

$$(a + b)^3 = a^3 + \underset{2}{P_3}\, a^2b + \underset{2}{P_3}\, ab^2 + b^3.$$

Eine ähnliche Betrachtung führt zu dem Schlusse, daß

$$(a + b)^4 = a^4 + \underset{3}{P_4}\, a^3b + \underset{2,2}{P_4}\, a^2b^2 + \underset{3}{P_4}\, ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + \underset{4}{P_5}\, a^4b + \underset{3,2}{P_5}\, a^3b^2 + \underset{2,3}{P_5}\, a^2b^3 + \underset{4}{P_5}\, ab^4 + b^5$$

oder allgemein

$$(a + b)^n = a^n + \underset{n-1}{P_n}\, a^{n-1}b + \underset{n-2,2}{P_n}\, a^{n-2}b^2 +$$

$$\underset{n-3,3}{P}\, a^{n-3}b^3 + \ldots + \underset{n-1}{P_n}\, ab^{n-1} + b^n$$

$$= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3$$

$$+ \ldots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

sein wird, was mit der obigen Gleichung (5) übereinstimmt.

Beispiele.

1) $(a + b)^4 = a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + b^4$

$= a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{1}ab^3 + b^4$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$

2) $\left(\frac{2a^2}{3} + \frac{3b^3}{c^2}\right)^5 = \left(\frac{2a^2}{3}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{2a^2}{3}\right)^4\left(\frac{3b^3}{c^2}\right) + \binom{5}{2}\left(\frac{2a^2}{3}\right)^3\left(\frac{3b^3}{c^2}\right)^2$

$+ \binom{5}{3}\left(\frac{2a^2}{3}\right)^2\left(\frac{3b^3}{c^2}\right)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{2a^2}{3}\right)\left(\frac{3b^3}{c^2}\right)^4 + \left(\frac{3b^3}{c^2}\right)^5$

$= \frac{32a^{10}}{243} + \frac{80a^8b^3}{27c^2} + \frac{80a^6b^6}{3c^4} + \frac{120a^4b^9}{c^6}$

$+ \frac{270a^2b^{12}}{c^8} + \frac{243b^{15}}{c^{10}}.$

3) Wie heißen das 5te, 8te und 10te Glied der Entwickelung von $(a + b)^{12}$?

Auflösung.

5tes Glied $= \overset{4}{C}_{12}\, a^8b^4 = \binom{12}{4}a^8b^4 = \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}a^8b^4 = 495a^8b^4$

8tes „ $= \overset{7}{C}_{12}\, a^5b^7 = \overset{5}{C}_{12}\, a^5b^7 = \binom{12}{5}a^5b^7 = 792a^5b^7$

10tes „ $= \overset{9}{C}_{12}\, a^3b^9 = \overset{3}{C}_{12}\, a^3b^9 = \binom{12}{3}a^3b^9 = 220a^3b^9.$

§. 16. Eigenschaften der Binomialcoefficienten.

1) Da allgemein

$$\binom{n}{m} a^{n-m} b^m = \binom{n}{m-1} \cdot \frac{n-(m-1)}{m} a^{n-m} b^m,$$

so kann irgend ein Binomialcoefficient aus dem unmittelbar vorhergehenden Gliede dadurch berechnet werden, daß man den Binomialcoefficienten dieses Gliedes mit dem ihm zugehörigen Exponenten von a multiplicirt und das Produkt durch den um die Einheit vermehrten Exponenten von b eben dieses Gliedes dividirt.

So ist z. B. das vierte Glied von

$$(a+b)^{10} = \binom{10}{3} a^7 b^3 = 1080 a^7 b^3,$$

also nach Vorstehendem das fünfte Glied

$$= \frac{1080.7}{4} a^6 b^4 = 1890 a^6 b^4.$$

2) Die Binomialreihe hat immer ein Glied mehr als der entsprechende Binomialexponent Einheiten enthält, also liefert jede gerade Potenz eines Binoms eine ungerade und jede ungerade Potenz eine gerade Anzahl von Gliedern. Im ersten Falle hat somit die Binomialreihe nur ein Mittelglied, im zweiten dagegen hat sie zwei solcher.

Ist der Exponent n gerade, hat die Reihe also nur ein Mittelglied, so wird dieses

$$= \binom{n}{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} = \frac{n(n-1)\ \ldots\ \left(\frac{n}{2}+2\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ \ldots\ \left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}.$$

Ist n ungerade, so wird das eine der Mittelglieder

$$= \binom{n}{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} = \frac{n(n-1)\ \ldots\ \left(\frac{n+5}{2}\right)\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\ .\ 2\ \ldots\ \left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)} a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}$$

und das andere

$$= \binom{n}{\frac{n+1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} = \frac{n(n-1) \ldots \left(\frac{n+3}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}{1 \cdot 2 \ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)} a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}$$

$$= \frac{n(n-1) \ldots \left(\frac{n+5}{2}\right)\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \ldots \left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)} a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}.$$

Die Binomialcoefficienten der beiden Mittelglieder sind somit einander gleich.

So ist z. B. das Mittelglied von

$$(a+b)^6 = \binom{6}{3} a^3 b^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^3 = 20a^3 b^3,$$

dagegen sind die beiden Mittelglieder von

$$(a+b)^7 = \binom{7}{3} a^4 b^3 \text{ und } \binom{7}{3} a^3 b^4$$

$$= 35a^4 b^3 \text{ und } 35a^3 b^4.$$

3) Nach Obigem ist der mte Binomialcoefficient =

$$\overset{m-1}{C_n} = \binom{n}{m-1} = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots [n-(m-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)}$$

$$= \frac{n!}{(m-1)!\,(n-(m-1))!}$$

Nun hat aber der mte Binomialcoefficient, von der Rechten gegen die Linke genommen, zum Stellenzeiger in der Binomialreihe diejenige Zahl, welche $(m-1)$ zu $(n+1)$ ergänzt und gehört somit zu dem $(n-m+2)$ten Gliede. Sein Werth ist daher

$$\binom{n}{n-m+2} = \frac{n!}{[n-(m-1)]!\,[n-(n-(m-1))]!}$$

$$= \frac{n!}{[n-(m-1)]!\,(m-1)!}$$

und stimmt also mit dem mten Binomialcoefficienten überein.

Die Binomialcoefficienten aller Glieder, welche gleich weit von den beiden Endgliedern abstehen, sind demnach einander gleich.

4) Die Binomialcoefficienten des mten und (m+1)ten Gliedes sind bezüglich

$$\overset{m-1}{C_n} \text{ und } \overset{m}{C_n} \text{ oder } \binom{n}{m-1} \text{ und } \binom{n}{m}.$$

Nun ist aber

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{m-1} \cdot \frac{n-(m-1)}{m},$$

also wird, wenn $\frac{n-(m-1)}{m} \gtrless 1$

ist, auch $\binom{n}{m} \gtrless \binom{n}{m-1}$.

Für $\frac{n-(m-1)}{m} \gtrless 1$

folgt: $n-m+1 \gtrless m$

oder $n+1 \gtrless 2m$

oder $\frac{n+1}{2} \gtrless m.$

Nun ist aber $\frac{n+1}{2}$ die halbe Anzahl aller Glieder und wir gelangen somit unter Berücksichtigung der Sätze 2) und 3) zu dem Satze:

Die Binomialcoefficienten der Binomialreihe werden in der ersten Hälfte immer größer und größer bis zum Mittelgliede und nehmen von hier an in der zweiten Hälfte der Reihe wieder fort und fort ab, so daß die Coefficienten in umgekehrter Ordnung auf einander folgen wie in der ersten Hälfte.

5) Setzt man in den Gleichungen (5) und (6)

$$a = b = 1,$$

so folgt:

$$(1+1)^n = 2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots \binom{n}{m} + \ldots \binom{n}{n-1} + 1$$

und

$$(1-1)^n = 0 = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots \pm \binom{n}{m} \pm \ldots \mp \binom{n}{n-1} \pm 1$$

d. h. die Summe aller Binomialcoefficienten wird, wenn das zweite Glied positiv ist, gefunden, wenn man 2 zum Binomialexponenten potenzirt.

Ist das zweite Glied negativ, so wird diese Summe Null.

§. 17. Aufgaben zur Uebung.

1) $(a + b)^7 = ?$

2) $(a - b)^9 = ?$

3) $(x + 1)^6 = ?$

4) $(1 - x)^8 = ?$

5) $(x + y)^{12} = ?$

6) $(2 - x)^{10} = ?$

7) $(2a - 3b)^5 = ?$

8) $\left(\frac{3x}{4} + \frac{2y}{3}\right)^4 = ?$

9) $\left(\frac{2a^2b}{3c^3} - \frac{3a^3c^4}{4b^2}\right)^5 = ?$

10) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^7 = ?$

11) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^7 = ?$

12) $(\sqrt{-3} - \sqrt{-2})^4 = ?$

13) Wie heißt a) das dritte, b) das fünfte, c) das achte Glied der Entwickelung $(3a^2 - 2b^3)^9$?

14) Wie heißt das Mittelglied von $(a-b)^{12}$?

15) Die beiden Mittelglieder von $(x+y)^{17}$ zu bestimmen.

16) Das fünfzehnte Glied von $(a-b)^{24}$ anzugeben.

17) Das zehnte Glied der Entwickelung $\left(\frac{5a^{-2}}{4b^{-5}} - \frac{4b^{-7}}{5c^3}\right)^{14}$ zu bestimmen.

18) Das fünfte Glied von $(a - \sqrt{-b})^9$ zu entwickeln.

b. Für negative und gebrochene Exponenten.

§. 18. Satz der unbestimmten Coefficienten.

1) Ist die Summe einer Reihe von der Form

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots,$$

wo $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ endliche, von x unabhängige Coefficienten bezeichnen, für jeden Werth von x, die Null nicht ausgeschlossen, gleich Null, so ist jeder der Coefficienten A_0, A_1, $A_2 \ldots$ selbst gleich Null.

Denn setzt man in der Gleichung

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots = 0 \ldots (1)$$

$$x = 0,$$

so wird

$$A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots = 0,$$

also auch $A_0 = 0$.

Da nun $A_0 = 0$ ist, so kann die Gleichung (1) auf die Form

$$x(A_1 + A_2x + A_3x^2 + \ldots) = 0$$

gebracht werden und da dieselbe für jeden Werth von x bestehen soll, so muß sein:

$$A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3 + \ldots = 0,$$

woraus folgt, wenn man wieder

$$x = 0$$

setzt: $A_1 = 0$.

Ebenso läßt sich zeigen, daß unter der gemachten Voraussetzung sein muß:

$$A_2 = 0,\ A_3 = 0,\ A_4 = 0 \text{ u. s. w.}$$

2) Sind die Summen zweier nach steigenden Potenzen von x geordneten Reihen

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots$$

und $$B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + \ldots$$

von einerlei Form, für jeden Werth von x, die Null nicht ausgenommen, endlich und einander gleich, so sind die Coefficienten gleichnamiger Potenzen von x in beiden Reihen einander gleich.

Denn aus der Gleichung

$$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots = B_0+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\ldots$$

folgt unmittelbar:

$$(A_0-B_0)+(A_1-B_1)x+(A_2-B_2)x^2+(A_3-B_3)x^3+\ldots = 0,$$

und da diese Gleichung nach der Voraussetzung für jeden Werth von x bestehen soll, so müssen nach dem vorhergehenden Satze die Beziehungen stattfinden:

$$A_0 - B_0 = 0,$$
$$A_1 - B_1 = 0,$$
$$A_2 - B_2 = 0 \text{ u. s. w.}$$

Hieraus ergibt sich aber sofort:

$$A_0 = B_0,$$
$$A_1 = B_1,$$
$$A_2 = B_2 \text{ u. s. w.}$$

Anmerkung. Dieser Satz wurde zuerst von Descartes (1596 bis 1650) bekannt gemacht und wird der Satz der unbestimmten Coefficienten genannt.

§. 19. Nachweis der Giltigkeit des binomischen Satzes für negative und gebrochene Exponenten.

Bei der obigen Herleitung der binomischen Gleichung

$$(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\ldots+\binom{n}{1}x^{n-1}+x^n \ldots (1)$$

haben wir bekanntlich vorausgesetzt, daß der Potenzexponent eine ganze positive Zahl sei, und es wäre nun zunächst zu untersuchen, ob die Binomialreihe auch für negative und gebrochene rationale Exponenten Giltigkeit hat.

Da für solche Werthe des Exponenten die Binomialreihe offenbar nicht mehr abbricht, also unendlich viele Glieder annimmt, so haben wir vorerst zu prüfen, ob man derselben in diesem Falle überhaupt noch einen Sinn beilegen kann, ob man alsdann im Allgemeinen noch von einer Summe eben jener Reihe sprechen, oder wenn solches nicht der Fall sein sollte, unter welchen Voraussetzungen dieses geschehen darf.

In Thl. I. §. 200. 5. wurde gezeigt, daß die Summe

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots . \quad (2)$$

von unendlich vielen Gliedern einen endlichen Werth liefert, sobald der absolute Werth von x kleiner als 1 ist, und wir haben daher zunächst zu untersuchen, für welche Werthe von x die Summe der Binomialreihe (1) sich immer mehr und mehr einem endlichen Werthe nähert, je mehr Anfangsglieder derselben man summirt.

Um diese Reihe (1) mit der geometrischen Reihe (2) vergleichen zu können, setzen wir

$$x < 1$$

voraus, was wir um so eher thun dürfen, als sich jedes Binom auf eine solche Form bringen läßt*).

Betrachten wir alsdann die zwei unmittelbar auf einander folgenden Glieder $a_m x^m$ und $a_{m+1} x^{m+1}$, so findet man:

$$a_m = \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\,(n-2)\,\ldots.\,[n-(m-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,m}$$

$$a_{m+1} = \binom{n}{m+1} = \frac{n(n-1)\,(n-2)\,\ldots.\,[n-(m-1)](n-m)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,m(m+1)}$$

und hieraus:

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{n-m}{m+1} = -\frac{m-n}{m+1},$$

*) Denn ist z. B. $p > q$, so ist

$$(p+q)^n = p^n\left(1+\frac{q}{p}\right)^n,$$

oder wenn man $\frac{q}{p} = x$, wo $x < 1$ ist, setzt:

$$(p+q)^n = p^n\,(1+x)^n.$$

Nehmen wir somit $m > n$, so ist das Verhältniß $\frac{a_{m+1}}{a_m}$, absolut genommen, kleiner als 1 und die absoluten Werthe der Coefficienten der binomischen Reihe bilden alsdann von einer gewissen Stelle an eine abnehmende Reihe. Brechen wir demnach die Binomialreihe bei dem Gliede $a_m x^m$ ab, so erhält man, wenn man a_m absolut nimmt, für die Summe s der nachfolgenden Glieder derselben:

$$s < a_m x^{m+1} + a_m x^{m+2} + a_m x^{m+3} + \ldots$$

oder $$s < a_m x^{m+1} (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$$

oder, da nach Thl. I. §. 200. (4) für $x < 1$,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

auch $$s < \frac{a_m x^{m+1}}{1-x},$$

wenn $x < 1$ ist.

Nun kann man aber m so groß wählen, daß s kleiner wird als jede noch so kleine Zahl (Thl. I. §. 65. 7.) und die Summe der Glieder der Binomialreihe (1) hat also immer einen endlichen Werth, sobald $x < 1$ angenommen wird.

Nachdem wir uns überzeugt haben, daß die Summirung der Binomialreihe, welche für $(1 + x)^n$ resultirt, stets möglich ist, sobald $x < 1$ vorausgesetzt wird, wollen wir nun zunächst zeigen, daß dieselbe auch unter dieser Voraussetzung für jeden negativen ganzen Werth des Exponenten Giltigkeit hat.

Bezeichnen m und n zwei ganze positive Zahlen, so ist nach §. 15 (4):

$$(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \ldots$$

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots$$

Multiplicirt man beide Gleichungen mit einander, so folgt:

$$(1 + x)^{m+n} = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots,$$

wo A_1, A_2, A_3, ... irgend Summen von Produkten der Binomialcoefficienten der zwei für $(1 + x)^m$ und $(1 + x)^n$ erhaltenen Binomialreihen bedeuten.

Da aber nach §. 15 (4) auch

$$(1+x)^{m+n} = 1 + \binom{m+n}{1}x + \binom{m+n}{2}x^2 + \binom{m+n}{3}x^3 + \ldots$$

ist, so muß

$$1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \ldots = 1 + \binom{m+n}{1} x + \binom{m+n}{2} x^2 + \binom{m+n}{3} x^3 + \ldots$$

sein. Diese Gleichung hat bei ganzen positiven m und n für jeden Werth von x, dagegen, wie wir oben gesehen haben, bei negativen, oder gebrochenen Exponenten nur für Werthe von $x < 1$ Giltigkeit. Unter dieser letzten Voraussetzung ist aber nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten (§. 18. 2):

$$A_1 = \binom{m+n}{1}$$

$$A_2 = \binom{m+n}{2}$$

$$A_3 = \binom{m+n}{3} \text{ u. s. w.}$$

und das Resultat der Multiplication der beiden Reihen stimmt somit mit demjenigen überein, welches erhalten wird, wenn man in der für $(1 + x)^n$ erhaltenen Reihe $(m + n)$ statt n setzt.

Bedeutet nun allgemein $[x, n]$ den Werth der Binomialreihe, welche $(1 + x)^n$ entspricht, so hat man nach Vorstehendem für beliebige Werthe von m und n:

$$[x, m] . [x, n] = [x, m + n].$$

Setzen wir hierin m ganz voraus und

$$m = - n,$$

so folgt:

$$[x, - n] . [x, n] = [x, 0] = 1,$$

und es wird somit

$$[x, - n] = \frac{1}{[x, n]}$$

oder wenn wir auf die Bedeutung dieser Symbole zurückgehen,

$$[x, - n] = \frac{1}{(1 + x)^n} = (1 + x)^{-n},$$

d. h. der binomische Satz gilt auch für negative ganze Zahlen, sobald $x < 1$ ist.

Aus obiger Relation

$$[x, m] . [x, n] = [x, m + n]$$

folgt ferner allgemein für beliebige Werthe von m, n, p, q, ... die Beziehung:

$$[x, m] . [x, n] . [x, p] . [x, q] \ldots = [x, m + n + p + q + \ldots]$$

und wenn man hierin

$$m = n = p = q = \ldots = \mu$$

setzt und die Anzahl der Faktoren der linken Seite durch v bezeichnet:

$$[x, \mu]^\nu = [x, \mu\nu].$$

Ist nun $\mu\nu$ eine ganze, positive oder negative Zahl $= n$, also

$$[x, \mu\nu] = (1 + x)^n,$$

so wird

$$[x, \mu]^\nu = (1 + x)^n$$

oder
$$[x, \mu] = (1 + x)^{\frac{n}{\nu}} = (1 + x)^\mu,$$

wo jetzt μ eine beliebige, positive oder negative gebrochene Zahl bedeuten kann.

Die Binomialreihe ist demnach unter der Voraussetzung $x < 1$ für jeden beliebigen rationalen Werth von n giltig.

Beispiele.

1) $$(1+x)^{-5} = 1 + (-5)x + \frac{-5(-5-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{-5(-5-1)(-5-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$
$$= 1 - 5x + 15x^2 - 35x^3 + \dots$$

2) $$(a-b)^{-4} = a^{-4} - (-4)a^{-4-1}b + \frac{-4(-4-1)}{1 \cdot 2}a^{-4-2}b^2 - \frac{-4(-4-1)(-4-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{-4-3}b^3 + \dots$$
$$= a^{-4} + 4a^{-5}b + 10a^{-6}b^2 + 20a^{-7}b^3 + \dots$$
$$= \frac{1}{a^4} + \frac{4b}{a^5} + \frac{10b^2}{a^6} + \frac{20b^3}{a^7} + \dots$$

3) $$(a+b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}-1}b + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1 \cdot 2}a^{\frac{1}{2}-2}b^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{\frac{1}{2}-3}b^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a^{\frac{1}{2}-4}b^4 + \dots$$
$$= a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}b - \frac{1}{8}a^{-\frac{3}{2}}b^2 + \frac{1}{16}a^{-\frac{5}{2}}b^3 - \frac{5}{128}a^{-\frac{7}{2}}b^4 + \dots$$
$$= a^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^2}{8a^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^3}{16a^{\frac{5}{2}}} - \frac{5b^4}{128a^{\frac{7}{2}}} + \dots$$

$$4)\ (x-y)^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}y + \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)}{1\,.\,2}x^{\frac{3}{4}-2}y^2$$

$$- \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)\left(\frac{3}{4}-2\right)}{1\,.\,2\,.\,3}x^{\frac{3}{4}-3}y^3 + \ldots.$$

$$= x^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}y - \frac{3}{32}x^{-\frac{5}{4}}y^2 - \frac{5}{128}x^{-\frac{9}{4}}y^3 - \ldots.$$

$$= x^{\frac{3}{4}} - \frac{3y}{4x^{\frac{1}{4}}} - \frac{3y^2}{32x^{\frac{5}{4}}} - \frac{5y^3}{128x^{\frac{9}{4}}} - \ldots.$$

§. 20. Der polynomische Satz.

Aus dem Früheren geht unmittelbar hervor, daß die Variationsformen von $\overset{n}{V}'(abcd\ldots.)$ übereinstimmen mit den Gliedern der Potenz $(a+b+c+d+\ldots.)^n$, wenn die Multiplication successive so vorgenommen wird, daß man sämmtlichen Gliedern der vorhergehenden Potenz zuerst a, dann b, dann c u. s. w. vorsetzt.

Nun kann aber $\overset{n}{V}'(abcd\ldots.)$ auch aus $\overset{n}{C}'(abcd\ldots.)$ gebildet werden, indem man jede Complexion dieser nochmals permutirt, und da das allgemeine Glied der nten Combinationsklasse die Form

$$a^\alpha\ b^\beta\ c^\gamma\ d^\delta\ \ldots.$$

hat, wo

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots. = n$$

ist, so kann man setzen:

$$(a+b+c+d+\ldots.)^n = \Sigma P^{\;n}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\ a^\alpha\ b^\beta\ c^\gamma\ d^\delta\ldots$$

$$= \Sigma\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!\ldots}a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma\, d^\delta\ldots$$

wo Σ bedeutet, daß für α, β, γ, δ, ... der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen, die Null nicht ausgeschlossen, zu setzen seien, welche der Bedingung genügen:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots. = n.$$

So ist z. B.

$$(a+b+c+d)^4 = \underset{4}{P_4}(a^4) + \underset{3}{P_4}(a^3b) + \underset{3}{P_4}(a^3c) +$$
$$\underset{3}{P_4}(a^3d) + \underset{2,2}{P_4}(a^2b^2) + \underset{2}{P_4}(a^2bc) + \underset{2}{P_4}(a^2bd)$$
$$+ \underset{2,2}{P_4}(a^2c^2) + \underset{2}{P_4}(a^2cd) + \underset{2,2}{P_4}(a^2d^2) + \underset{3}{P_4}(ab^3)$$
$$+ \underset{2}{P_4}(ab^2c) + \underset{2}{P_4}(ab^2d) + \underset{2}{P_4}(abc^2) + P_4(abcd)$$
$$+ \underset{2}{P_4}(abd^2) + \underset{3}{P_4}(ac^3) + \underset{2}{P_4}(ac^2d) + \underset{2}{P_4}(acd^2)$$
$$+ \underset{3}{P_4}(ad^3) + \underset{4}{P_4}(b^4) + \underset{3}{P_4}(b^3c) + \underset{3}{P_4}(b^3d)$$
$$+ \underset{2,2}{P_4}(b^2c^2) + \underset{2}{P_4}(b^2cd) + \underset{2,2}{P_4}(b^2d^2) + \underset{3}{P_4}(bc^3)$$
$$+ \underset{2}{P_4}(bc^2d) + \underset{2}{P_4}(bcd^2) + \underset{3}{P_4}(bd^3) + \underset{4}{P_4}(c^4)$$
$$+ \underset{3}{P_4}(c^3d) + \underset{2,2}{P_4}(c^2d^2) + \underset{3}{P_4}(cd^3) + \underset{4}{P_4}(d^4)$$

oder

$$(a + b + c + d)^4 = a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 4a^3d + 6a^2b^2 + 12a^2bc + 12a^2bd + 6a^2c^2 + 12a^2cd + 6a^2d^2 + 4ab^3 + 12ab^2c + 12ab^2d + 12abc^2 + 24abcd + 12abd^2 + 4ac^3 + 12ac^2d + 12acd^2 + 4ad^3 + b^4 + 4b^3c + 4b^3d + 6b^2c^2 + 12b^2cd + 6b^2d^2 + 4bc^3 + 12bc^2d + 12bcd^2 + 4bd^3 + c^4 + 4c^3d + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4.$$

Anmerkung. Auch der binomische Satz kann zur Potenzirung von Polynomien angewendet werden, wie aus Nachstehendem hervorgeht. Um z. B. den Werth von $(a+b+c)^4$ zu entwickeln, setze man vorerst

$$a + b = m$$

und bestimme

$$(m + c)^4 = m^4 + 4m^3c + 6m^2c^2 + 4mc^3 + c^4.$$

Führt man nun wieder den Werth von m ein, so wird

$$(a + b + c)^4 = (a + b)^4 + 4(a + b)^3 c + 6(a + b)^2 c^2 + 4(a + b) c^3 + c^4$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c + 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4.$$

Auf diesem Wege erhält man aber, wie der bloße Anblick lehrt, das Resultat nicht geordnet.

§. 21. Aufgaben zur Uebung.

1) $(a + b + c)^3 = ?$ 3) $(a + b + c)^5 = ?$
2) $(a + b + c)^4 = ?$ 4) $(a + b + c)^6 = ?$
5) $(a + b + c + d)^2 = ?$
6) $(a + b + c + d)^3 = ?$
7) $(a + b + c + d)^5 = ?$
8) $(2a - 3b + c)^3 = ?$
9) $(4x^2 + 3y^3 - 2z^4)^4 = ?$

Dritter Abschnitt.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§. 22. Einfache oder absolute Wahrscheinlichkeit.

1) Unter der einfachen oder absoluten Wahrscheinlichkeit (Probabilität) irgend eines Ereignisses versteht man das Verhältniß der für das Eintreffen desselben günstigen Fälle zu der Anzahl aller Fälle, welche überhaupt eintreten können oder möglich sind.

Man drückt deshalb die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch einen Bruch aus, dessen Zähler die Anzahl aller günstigen und dessen Nenner die Anzahl aller möglichen Fälle andeutet.

Soll man z. B. angeben, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, mit einem Würfel eine bestimmte Nummer, etwa 5 zu werfen, so erhält man, da nur dieser eine Fall günstig ist, während 6 verschiedene Würfe möglich sind, dafür den Bruch $\frac{1}{6}$.

Bezeichnen wir allgemein die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens irgend eines Ereignisses durch W, die Anzahl aller dem Eintreffen günstigen Fälle durch g und die aller möglichen Fälle durch m, so ist

$$W = \frac{g}{m} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1).$$

2) Man ersieht hieraus sogleich, daß die Wahrscheinlichkeit um so größer ist, je größer die Anzahl der günstigen Fälle im Verhältnisse zu der aller möglichen ist.

Für $$g = \frac{1}{2}m$$

wird $$W = \frac{1}{2}.$$

In diesem Falle sagt man, das Eintreffen des Ereignisses sei zweifelhaft. Je nachdem aber

$$W \gtrless \frac{1}{2}$$

ausfällt, ist das Eintreffen wahrscheinlich, oder unwahrscheinlich.

Wird $$g = m,$$
also $$W = 1,$$
so wird die Wahrscheinlichkeit zur Gewißheit.

Die Einheit ist somit das Symbol der Gewißheit.

3) Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ergebniß nicht, sondern das Gegentheil eintreffen werde, nennt man die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit des gehofften Ereignisses. Bezeichnen wir dieselbe durch $\underline{W}$, so wird offenbar

$$\underline{W} = 1 - \frac{g}{m} = \frac{m-g}{m} \text{ .... } (2).$$

So ist also in obigem Beispiele die Wahrscheinlichkeit, daß die Nummer 5 nicht fällt oder die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit

$$\underline{W} = \frac{5}{6}.$$

4) Sind der Reihe nach unter m gleichmöglichen Fällen einem Ereignisse $g_1, g_2, g_3, g_4, \ldots\ldots$ Fälle günstig, so hat man im Ganzen

$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + \ldots.$$

günstige Fälle. Also erhält man für die Wahrscheinlichkeit, daß der eine oder der andere der günstigen Fälle eintreffen werde:

$$W = \frac{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots}{m}$$

$$= \frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} + \frac{g_3}{m} + \ldots.$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das mehre Male eintreten kann, ist gleich der Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten aller einzelnen Fälle.

Beispiele.

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus dem bekannten Kartenspiele von 32 Blättern ein Bild zu ziehen?

Auflösung.

Da das Spiel nur 12 Bilder, im Ganzen aber 32 Karten enthält, so ist $g = 12$ und $m = 32$; somit die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}.$$

2) In einer Urne befinden sich 5 schwarze und 9 weiße Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf den ersten Zug a) eine schwarze, b) eine weiße Kugel zu bekommen?

Auflösung.

Im ganzen sind $5 + 9$ oder 14 Züge möglich, also ist a) für den Zug einer schwarzen:

$$W = \frac{5}{14},$$

b) für den Zug einer weißen:

$$W = \frac{9}{14}.$$

3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln 9 zu werfen?

Auflösung.

Im Ganzen sind $6^2 = 36$ Würfe möglich. Da nun zur Quersumme 9 nur die 4 Variationen 36, 45, 54, 63 mit Wiederholung möglich sind, so wird

$$W = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

4) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit aus einem gemischten Piquetspiele 5 Carreaux zu ziehen?

Auflösung.

Da das ganze Spiel 32 Karten enthält, von welchen auf $\overset{5}{C}_{32}$ Arten 5 gezogen werden können und von den darin enthaltenen 8 Carreaux sich 5 derselben auf $\overset{5}{C}_{8}$ Arten ziehen lassen, so ist

$$m = \overset{5}{C}_{32},\ g = \overset{5}{C}_{8},$$

$$W = \frac{\overset{5}{C}_8}{\overset{5}{C}_{32}} = \frac{\overset{3}{C}_8}{\overset{5}{C}_{32}} \frac{\frac{8.7.6}{1.2.3}}{\frac{32.31.30.29.28}{1.2.3.4.5}} = \frac{1}{3596}.$$

5) Die gewöhnliche Zahlenlotterie besteht aus 90 Numern, von welchen 5 gezogen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter den gezogenen Numern sich a) eine, b) zwei, c) drei, d) vier, e) fünf bestimmte Numern befinden?

Auflösung.

a) Da hier

$$m = 90, \; g = 5,$$

so ist für einen Auszug, wie man diesen Fall zu nennen pflegt:

$$W = \frac{5}{90} = \frac{1}{18} = 0{,}0555\ldots$$

b) In 90 Numern sind

$$\overset{2}{C}_{90} = 4005$$

und in den 5 Treffern

$$\overset{2}{C}_5 = 10 \text{ Amben}$$

enthalten, also ist

$$m = 4005, \; g = 10$$

und $W = \frac{10}{4005} = \frac{2}{801} = \frac{1}{400{,}5} = 0{,}0024968\ldots$

c) In 90 Numern sind

$$\overset{3}{C}_{90} = 117480$$

und in den 5 Treffern

$$\overset{3}{C}_5 = 10 \text{ Ternen}$$

enthalten, somit ist

$$W = \frac{10}{117480} = \frac{1}{11748} = 0{,}00008512\ldots$$

d) In 90 Numern sind

$$\overset{4}{C}_{90} = 2555190$$

und in den 5 Treffern

$$\overset{4}{C}_5 = 5 \text{ Quaternen}$$

enthalten, daher ist

$$W = \frac{5}{2555190} = \frac{1}{511038} = 0{,}00000019568\ldots.$$

e) In 90 Numern sind

$$\overset{5}{C}_{90} = 43949268$$

und in den 5 Treffern

$$\overset{5}{C}_{5} = 1 \text{ Quinte}$$

enthalten, somit ist

$$W = \frac{1}{43949268} = 0{,}000000022753 \ldots$$

6) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln entweder 5 oder 7 zu werfen?

Auflösung.

Die Wahrscheinlichkeit 5 zu werfen ist $= \frac{4}{36}$, die 7 zu werfen $= \frac{6}{36}$, also nach 4) die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{4}{36} + \frac{6}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

§. 23. Relative und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

1) Außer der oben behandelten einfachen oder absoluten Wahrscheinlichkeit unterscheidet man noch die relative und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

2) Die relative Wahrscheinlichkeit wird erhalten, wenn man mehre Fälle, welche mehren bestimmten Ereignissen günstig sind, mit einander in Vergleichung bringt, ohne hierbei auf diejenigen Fälle zu achten, welche überhaupt noch möglich sind.

Befinden sich z. B. in einem Gefäße 5 schwarze, 8 rothe, 10 gelbe und 9 blaue Kugeln, und man fragt, was die Wahrscheinlichkeit sei, eher eine schwarze, als eine rothe zu ziehen, so daß also alle Fälle, wo gelbe oder blaue gezogen werden, ganz ohne Entscheidung bleiben, so nennt man diese Wahrscheinlichkeit eine relative.

3) Unter zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit versteht man die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen zweier, oder mehrer von einander unabhängigen Ereignisse, sowie auch die Wahrscheinlichkeit, welche durch das Eintreffen eines, oder mehrer vorausgehenden Ereignisse bedingt wird.

Die Wahrscheinlichkeit z. B., aus einem Gefäße, in welchem sich eine bestimmte Anzahl numerirter Zettel befindet, gewisse Numern in vorgeschriebener Ordnung zu ziehen, ist eine zusammengesetzte. Ebenso die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel zwei gleiche Numern nach einander zu werfen u. dgl.

§. 24. Bestimmung der relativen Wahrscheinlichkeit.

1) Sind von mehren Ereignissen dem ersten g_1, dem zweiten g_2, dem dritten g_3 ꝛc. Fälle günstig, und bezeichnet m die Anzahl aller möglichen Fälle, so gibt es

$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + \dots$$

entscheidende Fälle. Also ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des ersten Ereignisses:

$$W_1 = \frac{g_1}{g_1 + g_2 + g_3 + \dots},$$

die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des zweiten Ereignisses:

$$W_2 = \frac{g_2}{g_1 + g_2 + g_3 + \dots} \text{ u. s. w.}$$

Dividirt man in diesen Ausdrücken Zähler und Nenner durch m, so folgt:

$$W_1 = \frac{\frac{g_1}{m}}{\frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} + \frac{g_3}{m} + \dots}$$

$$W_2 = \frac{\frac{g_2}{m}}{\frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} + \frac{g_3}{m} + \dots} \text{ u. s. w.}$$

Die relative Wahrscheinlichkeit des Ereignisses wird also erhalten, wenn man die absolute Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses durch die Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse, die in Betracht kommen, dividirt

Beispiele.

1) In einer Urne befinden sich 5 rothe, 8 blaue, 10 schwarze

und 7 weiße Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf den ersten Griff eher eine weiße, als eine rothe Kugel zu ziehen?

Auflösung.

Die Wahrscheinlichkeit für den Zug einer weißen Kugel ist

$$= \frac{7}{5 + 8 + 10 + 7} = \frac{7}{30},$$

für den einer rothen

$$= \frac{5}{5 + 8 + 10 + 7} = \frac{5}{30},$$

daher die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{\frac{7}{30}}{\frac{7}{30} + \frac{5}{30}} = \frac{7}{7 + 5} = \frac{7}{12}.$$

2) In einem Gefäße befinden sich 8 schwarze, 5 weiße, 10 gelbe und 4 rothe Kugeln und zwei derselben sollen gezogen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese eher eine schwarze und eine gelbe, als eine weiße und eine rothe seien?

Auflösung.

Die schwarzen und die gelben lassen sich auf $8 \cdot 10 = 80$ Arten und die weißen und rothen auf $5 \cdot 4 = 20$ Arten verbinden. Es wird daher

$$W = \frac{80}{80 + 20} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}.$$

3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln eher 8, als 5 zu werfen?

Auflösung.

Die Wahrscheinlichkeit 8 zu werfen ist $\frac{5}{36}$,

" " 5 " " " $\frac{4}{36}$,

also die verlangte relative Wahrscheinlichkeit $= \frac{5}{9}$.

§. 25. Bestimmung der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit.

Sind unter zwei gleichzeitigen Ereignissen dem ersten unter m_1 Fällen g_1 Fälle, dem zweiten unter m_2 Fällen g_2 Fälle günstig, so sind die absoluten Wahrscheinlichkeiten für beide Ereignisse bezüglich

$$W_1 = \frac{g_1}{m_1} \text{ und } W_2 = \frac{g_2}{m_2}.$$

Nun kann aber jeder der g_1 dem ersten Ereignisse günstigen Fälle mit den g_2 Fällen, welche dem zweiten Ereignisse günstig sind, auf $g_1\ g_2$ verschiedene Arten verbunden werden, so daß wir also für das gleichzeitige Eintreffen beider Ereignisse $g_1\ g_2$ günstige Fälle haben. Ebenso lassen sich die m_1 möglichen Fälle des ersten Ereignisses mit den m_2 möglichen Fällen des zweiten auf $m_1\ m_2$ verschiedene Arten verbinden, so daß im Ganzen $m_1\ m_2$ Fälle möglich sind. Für das gleichzeitige Eintreffen beider Ereignisse ist somit die Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{g_1\ g_2}{m_1\ m_2} = \frac{g_1}{m_1} \cdot \frac{g_2}{m_2} = W_1 \cdot W_2.$$

Nehmen wir noch ein drittes Ereigniß an, dem unter m_3 möglichen Fällen g_3 Fälle günstig sind, so erhalten wir auf analoge Weise für das gleichzeitige Eintreffen der drei Ereignisse die Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{g_1}{m_1} \cdot \frac{g_2}{m_2} \cdot \frac{g_3}{m_3} = W_1 \cdot W_2 \cdot W_3.$$

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen mehrer Ereignisse ist also gleich dem Produkte der absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen jedes einzelnen, von den übrigen unabhängigen, Ereignisses.

Beispiele.

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem gemischten Piquetspiele von 32 Karten unmittelbar nach einander einen König und eine Dame von der gleichen Farbe zu ziehen?

Auflösung.

Wahrscheinlichkeit einen König zu ziehen $= \frac{4}{32}$, Wahrscheinlichkeit hierauf eine Dame zu ziehen $= \frac{4}{31}$; folglich die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{31} = \frac{1}{62}.$$

2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine bestimmte Zahl zweimal nach einander zu werfen?

Auflösung.

Die Wahrscheinlichkeit, daß diese Zahl überhaupt fällt, ist $\frac{1}{6}$, folglich wird für ein zweimaliges Eintreffen die Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn aus 90 von 1 bis 90 numerirten Loosen 5 gezogen werden, daß die zuletzt gezogene Numer eine bestimmte sei?

Auflösung.

Die Wahrscheinlichkeit, auf den 1ten 2ten 3ten 4ten Zug nicht gezogen zu werden, ist bezüglich

$$\frac{89}{90}, \quad \frac{88}{89}, \quad \frac{87}{88}, \quad \frac{86}{87}$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß sie gezogen wird $= \frac{1}{86}$.

Man erhält somit für die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{87}{88} \cdot \frac{86}{87} \cdot \frac{1}{86} = \frac{1}{90}.$$

4) Von 90 Numern werden 5 gezogen; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß vier bestimmte Numern der Reihe nach in gegebener Ordnung zuerst gezogen werden?

Auflösung.

Man erhält

$$W = \frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89} \cdot \frac{1}{88} \cdot \frac{1}{87} = \frac{1}{61324560}.$$

5) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spieler bei dem Piquetspiele vier gleiche Karten (Aß, Damen ꝛc.) erhält?

Auflösung.

Da die Karten bekanntlich in der Weise ausgegeben werden, daß jeder Spieler 12 Karten erhält und 2 Parthien von 5 und 3 Karten gelegt werden, so ist die Anzahl der möglichen Spiele, welche überhaupt ausgegeben werden können,

$$= \overset{12}{C}_{32} \cdot \overset{12}{C}_{20} \cdot \overset{5}{C}_{8}.$$

Ein Spieler kann aber

$$\overset{8}{C}_{28} \cdot \overset{12}{C}_{20} \cdot \overset{5}{C}_{8}$$

mal 4 gleiche Karten erhalten, folglich ist die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{\overset{8}{C}_{28} \cdot \overset{12}{C}_{20} \cdot \overset{5}{C}_{8}}{\overset{12}{C}_{32} \cdot \overset{12}{C}_{20} \cdot \overset{5}{C}_{8}} = \frac{\overset{8}{C}_{28}}{\overset{12}{C}_{32}} = \frac{9.10.11.12}{32.31.30.29} = \frac{99}{7192}.$$

§. 26. Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses von mehren.

1) Bezeichnen W_1 und W_2 die absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen zweier Ereignisse, so sind die Wahrscheinlichkeiten, daß beide Ereignisse nicht eintreffen, bezüglich

$$1 - W_1 \text{ und } 1 - W_2.$$

Somit ist nach §. 25 die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, daß gleichzeitig beide Ereignisse nicht eintreffen,

$$= (1 - W_1)(1 - W_2) = \underline{W}_1 \, . \, \underline{W}_2.$$

Hieraus folgt aber unmittelbar für die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, oder für die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens eines dieser Ereignisse eintreffe:

$$W = 1 - (1 - W_1)(1 - W_2)$$
$$= 1 - \underline{W}_1 \, . \, \underline{W}_2.$$

2) Durch eine ähnliche Betrachtung erhalten wir für den Fall, daß unter mehren einzelnen Ereignissen, deren absolute Wahrscheinlichkeiten der Reihe nach $W_1, W_2, W_3, W_4, \ldots$ sind, wenigstens eines eintreffe, die Wahrscheinlichkeit

$$W = 1 - (1 - W_1)(1 - W_2)(1 - W_3)(1 - W_4) \ldots$$
$$= 1 - \underline{W}_1 \, . \, \underline{W}_2 \, . \, \underline{W}_3 \, . \, \underline{W}_4 \ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß von mehren Ereignissen wenigstens eines eintreffe, wird also gefunden, wenn man das Produkt der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten in Bezug auf die einzelnen Ereignisse von der Einheit subtrahirt.

Beispiele.

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter zwei Würfen mit zwei Würfeln wenigstens einer derselben 5 oder 8 Augen zählt?

Auflösung.

Da die absolute Wahrscheinlichkeit 5 zu werfen $= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ und die 8 zu werfen $= \frac{5}{36}$ ist, so sind die entgegengesetzten Wahr=

scheinlichkeiten bezüglich $\frac{8}{9}$ und $\frac{31}{36}$, folglich wird die fragliche Wahrscheinlichkeit

$$W = 1 - \frac{8}{9} \cdot \frac{31}{36} = 1 - \frac{62}{81} = \frac{19}{81}.$$

2) Aus einem gemischten Piquetspiele von 32 Karten wird zweimal nach einander eine Karte gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieselbe ein Aß oder ein Coeur sei?

Auflösung.

Wahrscheinlichkeit ein Aß zu ziehen $= \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$; Wahrscheinlichkeit ein Coeur zu ziehen $= \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$; folglich sind die entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten bezüglich $\frac{7}{8}$ und $\frac{3}{4}$. Es wird daher die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$W = 1 - \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{21}{32} = \frac{11}{32}.$$

§. 27. Wahrscheinlichkeit bei Wiederholung von Versuchen.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir annehmen, man habe a schwarze und b weiße Kugeln in einer Urne, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit W_1, auf den ersten Griff eine schwarze Kugel zu ziehen:

$$W_1 = \frac{a}{a + b}$$

und für die Wahrscheinlichkeit W_2, auf den ersten Zug eine weiße zu bekommen:

$$W_2 = \frac{b}{a + b}.$$

Werden aber zwei Züge nach einander vorgenommen, vorausgesetzt, daß die gezogene Kugel jedesmal wieder in die Urne geworfen wird, so können die gezogenen Kugeln sein:

1) zwei schwarze,
2) eine weiße und eine schwarze (in beliebiger Ordnung),
3) zwei weiße.

Die Wahrscheinlichkeiten für diese Fälle sind also nach §. 25, wenn auf die Ordnung in Bezug der Aufeinanderfolge keine Rücksicht genommen wird, der Reihe nach:

$$W_1^2,\ 2\,W_1\,W_2,\ W_2^2.$$

Für den Fall, daß dreimal nach einander gezogen wird, können die Kugeln sein:

1) drei schwarze,
2) zwei schwarze und eine weiße,
3) eine schwarze und zwei weiße,
4) drei weiße,

und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind somit, wenn von der Ordnung, in der die Farben folgen, abgesehen wird, bezüglich

$$W_1^3,\ 3\,W_1^2\,W_2,\ 3\,W_1\,W_2^2,\ W_2^3.$$

Analoge Betrachtungen führen zu dem Schlusse, daß die einzelnen Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Fälle, welche bei n wiederholten Versuchen eintreten können, der Reihe nach ausgedrückt sind durch die einzelnen Glieder der Entwickelung von $(W_1 + W_2)^n$, also nach §. 15 (5) durch die einzelnen Glieder der Reihe

$$W_1^n,\ \binom{n}{1} W_1^{n-1} W_2,\ \binom{n}{2} W_1^{n-2} W_2^2,\ \binom{n}{3} W_1^{n-3} W_2^3,\ \ldots\ W_2^n.$$

Das erste Glied dieser Reihe drückt also die Wahrscheinlichkeit aus, daß bei n Versuchen das erste Ereigniß n mal, das zweite Glied, daß bei n Versuchen das erste Ereigniß (n—1) mal, das zweite nur einmal eintreffe u. s. w.

Man erhält somit allgemein für den Fall, daß unter n wiederholten Versuchen das erste Ereigniß (n—m), das zweite m mal in willkührlicher Ordnung eintreffen soll, die Wahrscheinlichkeit

$$W = \binom{n}{m} W_1^{n-m} W_2^m$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,m}\, W_1^{n-m}\, W_2^m \ldots (1)$$

Anmerkung. Sollen die (n−m), sowie die m Fälle in bestimmter Ordnung auf einander folgen, so hat man

$$\binom{n}{m} = 1$$

zu setzen.

Um die Wahrscheinlichkeit für den Fall zu erhalten, daß das erste Ereigniß wenigstens (n—m) mal eintreffe, wo also alle Fälle, in welchen es mehr als (n—m) mal zutrifft, mit in Betracht zu ziehen sind, hat man die Summe aus sämmtlichen

Gliedern der Entwickelung von $(W_1 + W_2)^n$ bis zu dem die Wahrscheinlichkeit, daß das erste Ereigniß **nur** $(n-m)$ mal eintreffe, ausdrückenden Gliede zu bilden und somit zu setzen

$$W = W_1^n + \binom{n}{1} W_1^{n-1} W_2 + \ldots + \binom{n}{m} W_1^{n-m} W_2^m \ldots (2)$$

Soll das erste Ereigniß unter n Versuchen **nicht häufiger** als $(n-m)$ mal, aber auch **nicht weniger** als $(n-m-p)$ mal eintreffen, so wird die betreffende Wahrscheinlichkeit erhalten, wenn man in der Entwickelung $(W_1 + W_2)^n$ die einzelnen Glieder von dem Gliede an, in welchem W_1 in der $(n-m)$ten, bis zu dem Gliede, in welchem W_1 in der $(n-m-p)$ten Potenz auftritt, addirt. Es ist somit in diesem Falle

$$W = \binom{n}{m} W_1^{n-m} W_2^m + \binom{n}{m+1} W_1^{n-m-1} W_2^{m+1} + \ldots\ldots + \binom{n}{m+p} W_1^{n-m-p} W_2^{m+p} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Sind noch **mehr als zwei** Ereignisse möglich und bezeichnen $W_1, W_2, W_3, W_4, \ldots W_r$ der Reihe nach die betreffenden Wahrscheinlichkeiten derselben, so findet man analog, wie oben für zwei Ereignisse gezeigt wurde, daß das allgemeine Glied der Entwickelung

$$(W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + \ldots + W_r)^n$$

oder nach §. 20

$$P_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots\varrho}^{\;n} W_1^\alpha W_2^\beta W_3^\gamma \ldots W_r^\varrho = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots\varrho!} W_1^\alpha W_2^\beta W_3^\gamma \ldots W_r^\varrho \ldots (4)$$

die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daß bei n Versuchen das erste Ereigniß α mal, das zweite β mal, das dritte γ mal, ... das rte ϱ mal eintreffe.

Anmerkung.

Bezeichnet G dasjenige der Glieder der Binomialreihe $(W_1 + W_2)^n$, welches den größten Werth hat, so wird die ihm entsprechende Verbindung der Ereignisse, für welche W_1 und W_2 die Wahrscheinlichkeiten sind, offenbar die **größte** Wahrscheinlichkeit unter allen vorkommenden Verbindungen für sich haben.

Nehmen wir nun an, das allgemeine Glied

$$\binom{n}{m} W_1^{n-m} W_2^m$$

sei zugleich das größte aller Glieder und setzen darin einmal m—1 statt m, das andere mal m+1 statt m, so resultiren die beiden unmittelbar angrenzenden Glieder. Nach der Voraussetzung ist nun

$$\binom{n}{m} W_1^{n-m} W_2^m > \binom{n}{m-1} W_1^{n-m+1} W_2^{m-1}$$

$$\binom{n}{m+1} W_1^{n-m-1} W_2^{m+1} < \binom{n}{m} W_1^{n-m} W_2^m$$

oder

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+2)\,(n-m+1)}{1\,.\,2\ldots(m-1)\,m} W_1^{n-m} W_2^m > \frac{n(n-1)\ldots(n-m+2)}{1\,.\,2\ldots(m-1)} W_1^{n-m+1} W_2^{m-1}$$

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)\,(n-m)}{1\,.\,2\ldots m\,(m+1)} W_1^{n-m-1} W_2^{m+1} < \frac{n(n-1)\ldots(n-m+2)\,(n-m+1)}{1\,.\,2\ldots m} W_1^{n-m} W_2^m$$

oder

$$(n-m+1)\,W_2 > mW_1$$
$$(n-m)\,W_2 < (m+1)W_1$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}(n+1)\,W_2 > (W_1+W_2)\,m \\ n\,W_2 - W_1 < (W_1+W_2)\,m\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Sind nun dem ersten Ereignisse g_1, dem zweiten g_2 Fälle günstig, und im Ganzen $g_1 + g_2$ Fälle möglich, ist also

$$W_1 = \frac{g_1}{g_1+g_2},$$
$$W_2 = \frac{g_2}{g_1+g_2},$$
$$W_1 + W_2 = 1,$$

und nehmen wir an, es sei der Wiederholungsexponent

$$n = (g_1 + g_2)x,$$

wo x irgend eine ganze positive Zahl bedeutet, also

$$g_1 + g_2 = \frac{n}{x},$$

so wird:

$$W_1 = \frac{g_1 x}{n}, \quad W_2 = \frac{g_2 x}{n},$$
$$nW_1 = g_1 x, \quad nW_2 = g_2 x,$$
$$(n+1)W_2 = nW_2 + W_2 = g_2 x + W_2,$$
$$nW_2 - W_1 = g_2 x - W_1;$$

also nach den Ungleichungen (1):

$$g_2 x + W_2 > m$$
$$g_2 x - W_1 < m.$$

Aus beiden Ungleichheiten folgt aber, da offenbar m eine ganze Zahl ist, W_1 und W_2 aber echte Brüche sind, daß

$$m = g_2 x,$$

also $$n - m = (g_1 + g_2)x - g_2 x = g_1 x$$

sein muß, oder daß sich verhält:

$$n - m : m = g_1 x : g_2 x = \frac{g_1}{g_1 + g_2} : \frac{g_2}{g_1 + g_2} = W_1 : W_2.$$

Wir ziehen hieraus folgenden Schluß:

Die Wahrscheinlichkeit der Verbindung beider Ereignisse bei $(g_1 + g_2)x$ Versuchen ist am größten, wenn deren Wiederholungszahlen sich wie die entsprechenden absoluten Wahrscheinlichkeiten verhalten, oder wenn unter $(g_1 + g_2)x$ Versuchen das erste $g_1 x$, das zweite $g_2 x$ mal eintreffen soll.

Bestimmt man das entsprechende Glied der Entwickelung $(W_1 + W_2)^{(g_1 + g_2)x}$, so folgt für diejenige Verbindung beider Ereignisse die größte Wahrscheinlichkeit, für welche man hat:

$$W = \binom{(g_1 + g_2)x}{g_2 x} W_1^{g_1 x} W_2^{g_2 x}.$$

Je öfter man die Versuche wiederholt, um so mehr fallen die Wiederholungen der Ereignisse den ihnen zukommenden günstigen Fällen oder absoluten Wahrscheinlichkeiten proportional aus.

Befinden sich z. B. in einer Urne 3 schwarze und 2 weiße Kugeln, und wird aus derselben sehr oftmals eine Kugel gezogen, die gezogene Kugel aber jedesmal wieder in die Urne gelegt, so wird sich schließlich die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln zur Anzahl der gezogenen weißen Kugeln nahezu wie 3 zu 2 verhalten. Man nennt dieses das Gesetz der großen Zahlen.

Beispiele.

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel unter 4 Würfen einmal 6 zu werfen?

Auflösung.

Die Wahrscheinlichkeit 6 zu werfen ist $\frac{1}{6}$, die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit also $\frac{5}{6}$.

Setzt man somit

$$W_1 = \frac{1}{6},\ W_2 = \frac{5}{6},\ n = 4,\ m = 3,\ n - m = 1,$$

so folgt für die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{4.3.2}{1.2.3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{324}.$$

2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenn ein Geldstück 6 mal in die Höhe geworfen wird, 5 mal der Kopf nach oben zu liegen komme?

Auflösung.

Setze

$$W_1 = \frac{1}{2},\ W_2 = \frac{1}{2},\ n = 6,\ m = 1,\ n - m = 5,$$

so folgt

$$W = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{32}.$$

3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel bei viermaligem Werfen die Zahl 3 **wenigstens** einmal zu werfen?

Auflösung.

Setzt man

$$W_1 = \frac{1}{6},\ W_2 = \frac{5}{6},\ n = 4,\ m = 3,\ n - m = 1,$$

und berücksichtiget, daß der Wurf 3 auch **mehr** als einmal geschehen darf, so erhält man für die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$W = W_1^4 + \binom{4}{1} W_1^3 W_2 + \binom{4}{2} W_1^2 W_2^2 + \binom{4}{3} W_1 W_2^3$$
$$= \left(\frac{1}{6}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3$$
$$= \frac{1 + 20 + 150 + 500}{6^4} = \frac{671}{1296}.$$

Anmerkung. Zu demselben Resultate gelangt man auch auf folgende Weise: Die Wahrscheinlichkeit, daß die Zahl 3 viermal nach einander **nicht** geworfen werde, ist nach §. 25 $= \left(\frac{5}{6}\right)^4$; folglich wird die Wahrscheinlichkeit des Gegentheiles, oder daß sie wenigstens einmal fällt (§. 26)

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}.$$

4) In einem Gefäße befinden sich 5 schwarze und 3 weiße Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in 6 Zügen 4 schwarze und 2 weiße Kugeln zu ziehen, vorausgesetzt, daß nach jedem Zuge die gezogene Kugel wieder in das Gefäß gelegt wird?

Auflösung.

Die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel zu ziehen ist $\frac{5}{8}$, die eine weiße zu ziehen $= \frac{3}{8}$.

Setzt man daher

$$W_1 = \frac{5}{8},\ W_2 = \frac{3}{8},\ n = 6,\ m = 2,\ n - m = 4$$

so folgt:

$$W = \frac{6\ .\ 5}{1\ .\ 2}\left(\frac{5}{8}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{84375}{262144}.$$

5) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel unter 8 Würfen **wenigstens** dreimal 6 zu werfen?

Auflösung.

Man hat in obigem allgemeinen Ausdrucke:

$$W_1 = \frac{1}{6},\ W_2 = \frac{5}{6},\ n = 8,\ m = 5,\ n - m = 3$$

zu setzen. Da nun aber 6 auch **mehr als** dreimal fallen darf, so ist die zu suchende Wahrscheinlichkeit

$$W = W_1^8 + \binom{8}{1} W_1^7 W_2 + \binom{8}{2} W_1^6 W_2^2 + \binom{8}{3} W_1^5 W_2^3 + \binom{8}{4} W_1^4 W_2^4 + \binom{8}{5} W_1^3 W_2^5$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^8 + 8\left(\frac{1}{6}\right)^7\left(\frac{5}{6}\right) + 28\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 56\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^3 + 70\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^4 + 56\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5$$

$$= \frac{1 + 40 + 700 + 7000 + 43750 + 175000}{1679616}$$

$$= \frac{75497}{559872} = 0{,}134\ \ldots$$

6) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Kopf- und Schildspiele mit einer Münze bei zwei Würfen **wenigstens** einmal Kopf zu werfen?

Auflösung.

Man erhält

$$W = W_1^2 + 2\,W_1 W_2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Anmerkung. Zu demselben Resultate gelangt man durch folgende Betrachtung:

Die Wahrscheinlichkeit, daß in beiden Fällen Kopf **nicht** fällt, ist nach §. 25 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; folglich die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, oder die Wahrscheinlichkeit, daß sich unter den 2 Würfen Kopf befindet (§. 26):

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

7) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel unter 8 Würfen nicht mehr als 4 mal, aber nicht weniger als 2 mal, die Zahl 6 zu werfen?

Auflösung.

Da $W_1 = \frac{1}{6}$, $W_2 = \frac{5}{6}$ ist, so folgt nach Gleichung (3):

$$W = \binom{8}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \binom{8}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{8}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^6$$

$$= 70\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^4 + 56\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5 + 28\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^6$$

$$= \frac{43750 + 175000 + 437500}{6^8} = \frac{109375}{279936} = 0{,}3907\ldots$$

§. 28. Die mathematische Hoffnung.

Es ist klar, daß beim Wetten oder Spielen um einen Gewinn diejenige von zwei Personen den größeren Einsatz bieten wird, welche die größere Wahrscheinlichkeit für sich hat zu gewinnen, oder daß, wenn eine Wette billig sein soll, die Einsätze in demselben Verhältnisse zu einander stehen müssen, wie die Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens des in Frage stehenden Ereignisses oder des Gewinnens.

Bezeichnen wir daher durch E und E_1 die Einsätze, welche zwei Personen A und B bieten, durch W und W_1 bezüglich die Wahrscheinlichkeiten, welche sie für sich haben zu gewinnen, so muß sich verhalten

$$E : E_1 = W : W_1.$$

Für den Fall, daß W_1 zur Gewißheit oder $= 1$ wird, geht E_1 in den Gewinn G selbst über und wir haben somit:

$$E : G = W : 1,$$

woraus folgt: $$E = WG.$$

Das Produkt WG nennt man den mathematischen Hoffnungs- oder Erwartungswerth des betreffenden Ereignisses.

Bezeichnen wir durch G_1 und G_2 irgend zwei Gewinne, durch E_1 und E_2 die entsprechenden Einsätze und durch W_1 und W_2 die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, so ist

$$E_1 = W_1 G_1,\ E_2 = W_2 G_2,$$

$$G_1 = \frac{E_1}{W_1},\ G_2 = \frac{E_2}{W_2},$$

folglich verhält sich

$$G_1 : G_2 = \frac{E_1}{W_1} : \frac{E_2}{W_2}$$

und für gleiche Einsätze

$$G_1 : G_2 = W_2 : W_1.$$

d. h. bei gleichen Einsätzen müssen sich die Gewinne umgekehrt verhalten wie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Aus vorstehender Proportion folgt unmittelbar die Gleichung:

$$G_1\ W_1 = G_2\ W_2.$$

Soll daher ein Spiel billig sein, so müssen die Hoffnungswerthe der Spielenden einander gleich sein.

Anmerkung. Wie unverhältnißmäßig der Einsatz zum Gewinne bei manchen Spielen genommen wird, zeigt am klarsten das bis in die neueste Zeit in Baiern bestandene Lottospiel. Die Bank zahlte nämlich den Auszug mit dem 15fachen, die Ambe mit dem 270fachen, die Terne mit dem 5400fachen und die Quaterne mit dem 60000fachen Einsatze.

Berücksichtigt man nun, daß nach §. 22, Beispiel 5 die Bank 5 Auszüge mit 5 . 15 = 75 Einsätzen bezahlt, dagegen 90 Einsätze einzieht, so ergibt sich in diesem Falle ein Gewinn für dieselbe von

$$\frac{15 \cdot 100}{90} = 16\tfrac{2}{3}\ \%.$$

Analog findet man für eine Ambe, da die Bank 4005 Einsätze bezieht, aber nur die 10 Amben, welche gewinnen, mit 2700 Einsätzen auszahlt, daß sie gewinnt:

$$\frac{1305 \cdot 100}{4005} = 32{,}5\ \%.$$

Bei einer Terne zieht die Bank 117480 Einsätze, zahlt dafür nur 10 solcher mit 54000 Einsätzen zurück und gewinnt somit

$$\frac{63480 \cdot 100}{117480} = 54\ \%.$$

Bei einer Quaterne endlich beläuft sich der Gewinn der Bank auf 88,2 %.

Man erkennt hieraus unmittelbar den ungeheueren Vortheil, welchen der Staat aus solchen Anstalten gezogen hat, da selbst die Verwaltungskosten und sonstige Ausgaben, welche die Bank zu bestreiten hatte, in keinem Verhältnisse zu dem enormen Gewinne standen.

Beispiele.

1) A wettet, mit zwei Würfeln auf den ersten Wurf einen Pasch, d. h. zwei gleiche Augen zu werfen, B behauptet das Gegentheil; wie müssen sich die Einsätze beider verhalten?

Auflösung.

Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist für A $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, folglich für B $= \frac{5}{6}$ und es ist somit das gesuchte Verhältniß $\frac{1}{6} : \frac{5}{6}$ oder 1 : 5. Soll daher die Wette eine billige sein, so muß B 5 mal so viel einsetzen als A.

2) A wirft mit 3 Würfeln und bekommt, so oft er einen Pasch, d. h. nur 2 gleiche Zahlen wirft, von B als Gewinn 4 Mark, für jeden anderen Wurf aber nichts; wie viel hat A dagegen einzusetzen?

Auflösung.

Die zwei Würfel können 6 verschiedene Pasche geben. Der dritte Würfel kann dann noch auf 5 Arten fallen. Da es aber gleichgiltig ist, welche von den drei Würfeln den Pasch geben, und $C_3 = 3$ ist, so erhält man $3 . 30 = 90$ günstige Fälle und für die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens $= \frac{90}{6^3} = \frac{90}{216} = \frac{5}{12}$. Es folgt daher, da $\frac{5}{12} . 4 = \frac{7}{12}$ x sein muß, für A der Einsatz

$$x = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7} \text{ Mk.}$$

3) A wettet mit B mit einem Würfel zweimal nach einander 6 zu werfen. Nachdem aber A wirklich mit dem ersten Wurfe 6 geworfen hatte, bricht B das Spiel ab. Wenn nun der Gewinn sammt Einsatz $1\frac{1}{5}$ Mark betragen soll, wie viel hatte jeder einzusetzen und was erhält jeder, nachdem der Wurf geschehen ist, bei rechtmäßiger Vertheilung der Einsätze?

Auflösung.

Die Wahrscheinlichkeit für A, zweimal nach einander 6 zu werfen, ist $\frac{1}{6} . \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ (§. 25), folglich hat B die Wahrscheinlichkeit $\frac{35}{36}$ für sich und die Einsätze müssen sich somit verhalten wie 1 : 35. A hat somit $\frac{1}{30}$ Mark und B $1\frac{1}{6}$ Mark einzusetzen. Da nun A einmal 6 geworfen hat, so bleibt ihm für das Eintreffen seiner Wette noch die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ und die mathematische Hoffnung hat somit für ihn den Werth $\frac{1}{6} . 1\frac{1}{5}$ Mark $= \frac{1}{5}$ Mark. Bei der Vertheilung hat also A $\frac{1}{5}$ Mark und B 1 Mark zu bekommen.

4) A und B spielen Piquet. Wer von ihnen zuerst drei Parthien gewinnt, erhält den Einsatz mit 12 Mark, zu welchem jeder 6 Mark beigesteuert hat. Nachdem A zwei und B eine Parthie gewonnen hatte, wird das Spiel unterbrochen und der Einsatz vertheilt. Wie viel erhält jeder?

Auflösung.

Gewinnt A die vierte oder fünfte Parthie, so erhält er den ganzen Einsatz. Die Wahrscheinlichkeit aber, unter 2 Parthien **wenigstens** eine zu gewinnen, ist nach §. 27

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4};$$

folglich erhält A bei der Vertheilung $\frac{3}{4} \cdot 12 = 9$ Mark und B 3 Mark.

5) A und B spielen um gleiche Einsätze. Wer zuerst 5 Spiele gewonnen hat, erhält den Einsatz des anderen zu dem seinigen. Nachdem A 3 und B 2 Parthien gewonnen hatte, wird das Spiel unterbrochen; nach welchem Verhältnisse ist der ganze Satz zu vertheilen?

Auflösung.

Da nur noch höchstens 4 Parthien zu machen sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß A **wenigstens** 2 derselben gewinnt, nach §. 28

$$= W_1^4 + 4W_1^3W_2 + 6W_1^2W_2^2$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}.$$

Es erhält somit A $\frac{11}{16}$ und B $\frac{5}{16}$ des Satzes.

Anmerkung.

Bezeichnen W_1 und W_2 die Wahrscheinlichkeiten, welche bezüglich zwei Spieler A und B für sich haben, g_1, g_2 die entsprechenden günstigen Fälle, so hat nach der Anmerkung zu §. 27 bei einer $(g_1 + g_2)$xmaligen Wiederholung des Spieles dasjenige Spiel die größte Wahrscheinlichkeit für sich, für welches diese ausgedrückt ist durch

$$\binom{(g_1+g_2)x}{g_2x} W_1^{g_1x} W_2^{g_2x},$$

wo die Exponenten g_1x und g_2x angeben, wie oftmals bezüglich A und B gewinnen werden.

Bezeichnet nun E_1 den Einsatz des A, E_2 den des B, so beträgt der Gewinn des A jedesmal E_2, sein Verlust dagegen E_1, und es ist somit

nach $(g_1 + g_2)x$ maliger Wiederholung des Spieles im Ganzen dessen Gewinn $= g_1 xE_2$ und dessen Verlust $= g_2 xE_1$.

Nun verhält sich aber

$$E_1 : E_2 = W_1 : W_2 = g_1 : g_2,$$

also ist

$$g_2 E_1 = g_1 E_2$$

oder

$$g_1 E_2 - g_2 E_1 = 0,$$

somit auch

$$x(g_1 E_2 - g_2 E_1) = g_1 xE_2 - g_2 xE_1 = 0.$$

Hieraus geht unmittelbar hervor, daß das Spiel stets ein zu billigendes bleibt, wenn es unter den oben angegebenen Bedingungen auch mehrmals wiederholt wird.

Anders verhält es sich aber, wenn einer der Spieler gegen den anderen irgendwie im Vortheile ist, wie z. B. bei dem schon erwähnten Lottospiele, dem in Badeorten häufig gespielten Roulette u. dgl.

Denn behalten wir die obige Bezeichnung bei, bezeichnen B als Bankinhaber und dessen Vortheil durch V, so müßte eigentlich die Gleichung bestehen:

$$W_1 (E_2 + V) = W_2 E_1,$$

da der mathematische Hoffnungswerth des A $= W_1 (E_2 + V)$ sein sollte.

In Wirklichkeit ist derselbe aber nur $W_1 E_2$, so daß den Theil $W_1 V$ die Bank für sich behält. Wiederholt sich nun das Spiel $(g_1 + g_2)x$ mal, so ist unter allen Fällen derjenige der wahrscheinlichste, daß A g_1 x mal gewinnt.

Wäre das Spiel ein billiges, so würde sein Gewinn sein:

$$g_1 x(E_2 + V) = g_1 xE_2 + g_1 xV.$$

Da er aber in Wirklichkeit nur $g_1 xE_2$ bekommt, so erleidet er jedenfalls einen Verlust $= g_1 xV$, der um so größer wird, je größer x ist, also je öfter sich das Spiel wiederholt. Hieraus geht deutlich hervor, welchen enormen Gewinn die Bank aus solchen Spielen zieht, da diese sich rasch nach einander wiederholen und x in kurzer Zeit sehr hohe Werthe annimmt.

§. 29. Wahrscheinlichkeit der menschlichen Lebensdauer.

1) Manche Berechnungen, wie z. B. die der Leibrenten, gründen sich auf die Wahrscheinlichkeit der menschlichen Lebensdauer und es liegen denselben darum die sogenannten Sterblichkeits- oder Mortalitätstabellen zu Grunde, d. h. Tabellen, in welchen nachgewiesen ist, wie viel von einer bestimmten Anzahl Neugeborner in den verschiedenen Altersstufen sterben.

2) Die besten Sterblichkeitstabellen verdanken wir den Leibrenten- und Lebensversicherungsanstalten, welche dieselben aus den eigenen Beobachtungen über das Ableben ihrer Mitglieder aufgestellt haben. Wir besitzen solche Tabellen von Deparcieux

über die Besitzer von Leibrenten in Frankreich, von Kerseboom über die Leibrentenbesitzer in Holland, von Finlaison über die Leibrentenbesitzer in England und Irland, von Duvillard für Frankreich, von Quetelet für Belgien, von Casper für Berlin u. m. a.

Den nachfolgenden numerischen Beispielen wollen wir stets folgende von Süßmilch-Baumann für beide Geschlechter aufgestellte Tabelle zu Grunde legen:

Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.
0	1000	32	427	64	172
1	750	33	421	65	162
2	661	34	415	66	152
3	618	35	409	67	142
4	593	36	402	68	132
5	579	37	395	69	122
6	567	38	388	70	112
7	556	39	381	71	103
8	547	40	374	72	94
9	539	41	367	73	85
10	532	42	360	74	77
11	527	43	353	75	69
12	523	44	346	76	62
13	519	45	339	77	55
14	515	46	332	78	49
15	511	47	324	79	43
16	507	48	316	80	37
17	503	49	308	81	32
18	499	50	300	82	28
19	495	51	291	83	24
20	491	52	282	84	20
21	486	53	273	85	17
22	481	54	264	86	14
23	476	55	255	87	12
24	471	56	246	88	10
25	466	57	237	89	8
26	461	58	228	90	6
27	456	59	219	91	5
28	451	60	210	92	4
29	445	61	201	93	3
30	439	62	192	94	2
31	433	63	182	95	1
				96	0

3) Mittelst der Sterblichkeitstabelle sind wir nun im Stande für jedes Alter die Wahrscheinlichkeit der ferneren Lebensdauer zu bestimmen.

Angenommen, es sei Jemand z. B. 30 Jahre alt, so wird die Wahrscheinlichkeit, daß er noch 25 Jahre lang lebe, gefunden, wenn man mit der Anzahl der nach der Tabelle im 30ten Jahre Lebenden in die im (30+25)ten oder 55ten Jahre Lebenden dividirt. Es ist daher

$$W = \frac{255}{439};$$

denn 255 stellt die Anzahl der günstigen und 439 die der möglichen Fälle vor.

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, daß eine 30jährige Person das 55te Lebensjahr nicht erreichen werde, ist hiernach

$$\underline{W} = 1 - \frac{255}{439} = \frac{184}{439}.$$

4) Ergibt sich für eine Person die Wahrscheinlichkeit noch m Jahre zu durchleben $= \frac{1}{2}$, so ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ebenfalls $= \frac{1}{2}$ und man nennt in diesem Falle m die wahrscheinliche Lebensdauer jener Person.

Um die wahrscheinliche Lebensdauer zu bestimmen, sehe man in der Tabelle nach, in wie viel Jahren die bei dem betreffenden Alter angeführte Anzahl der Lebenden nur noch die Hälfte beträgt.

Ist z. B. Jemand 25 Jahre alt, so findet man in der Tabelle die entsprechende Anzahl von Lebenden = 466 und hiervon leben im 57ten Jahre noch 237 oder nahezu die Hälfte. Die wahrscheinliche Lebensdauer einer 25jährigen Person wäre hiernach 57 — 25 = 32 Jahre und das wahrscheinliche Alter 57 Jahre.

5) Wie man sich leicht überzeugt, findet man selten genau die Hälfte der in einem bestimmten Alter Lebenden unter den nachfolgenden Zahlen der Tabelle.

Um nun zu zeigen, wie man die wahrscheinliche Lebensdauer genauer bestimmt, wollen wir annehmen, unter P_m mjäh-

rigen Personen erreichen P_n Personen das n te und P_{n+1} das $(n+1)$te Lebensjahr und es sei

$$P_n > \frac{P_m}{2}, \text{ aber } P_{n+1} < \frac{P_m}{2}.$$

In diesem Falle liegt offenbar das wahrscheinliche Lebensalter zwischen n und $(n+1)$ Jahren. Bezeichnen wir nun die Anzahl der noch zu n Jahren fehlenden und der Differenz $P_n - P_{n+1}$ entsprechenden Monate durch x, so erhält man aus der Proportion

$$P_n - P_{n+1} : P_n - \frac{P_m}{2} = 12 : x$$

$$x = \frac{\left(P_n - \frac{P_m}{2}\right)12}{P_n - P_{n+1}} \text{ Monate.}$$

So ist z. B. für obige Annahme $P_m = 466$, $P_n = 237$, $P_{n+1} = 228$ und somit die wahrscheinliche Lebensdauer genauer

$$= 32 \text{ Jahre } + \frac{4 \cdot 12}{9} \text{ Mon. } = 32 \text{ Jahre } 5\tfrac{1}{3} \text{ Mon.}$$

Anmerkung. Hierbei wird stets vorausgesetzt, daß das Absterben während eines Jahres gleichförmig stattfinde.

§. 30. Mittlere Lebensdauer.

Dividirt man die Summe der Anzahl Jahre, welche z. B. P_m m jährige Personen einzeln genommen nach der Sterblichkeitstabelle noch zu durchleben haben, durch die Anzahl P_m der Personen, so erhält man die **mittlere Lebensdauer** für eine m jährige Person.

Bezeichnen wir somit durch

$$P_m, P_{m+1}, P_{m+2}, P_{m+3}, \ldots$$

der Reihe nach die Anzahl der im mten, $(m+1)$ten, $(m+2)$ten, $(m+3)$ten Lebensjahre nach der Sterblichkeitstabelle noch lebenden Personen, so ist für eine m jährige Person die mittlere Lebensdauer

$$= \frac{P_m + P_{m+1} + P_{m+2} + P_{m+3} + P_{m+4} + \ldots}{P_m}$$

Hiernach wäre z. B. die mittlere Lebensdauer einer 85 jährigen Person

$$= \frac{17+14+12+10+8+6+5+4+3+2+1}{17}$$

$$\frac{82}{17} = 4\tfrac{14}{17} \text{ Jahre } = 4 \text{ Jahre } 9\tfrac{15}{17} \text{ Mon.}$$

Da nun aber das Absterben nicht genau mit dem Jahreswechsel geschieht, also nicht, wie hier vorausgesetzt wurde, zu Ende eines jeden Jahres, sondern sich die Sterbefälle auf das ganze Jahr vertheilen, so nimmt man an, es geschehe solches gleichförmig und setzt darum die **Mitte** des Jahres als diejenige Zeit fest, wo die Sterbefälle eintreten.

Die genauere Berechnung der mittleren Lebensdauer einer m jährigen Person ergibt sich somit wie folgt: Zu Ende des ersten Jahres leben noch P_{m+1} Personen, also durchleben $(P_m - P_{m+1})$ nur $\frac{1}{2}$ Jahr, und da am Ende des zweiten Jahres noch P_{m+2} Personen leben, so haben $(P_{m+1} - P_{m+2})$ Personen zusammen $\frac{3}{2}$ Jahre durchlebt rc. Für P_m m jährige Personen erhalten wir hiernach folgende Summe von durchlebten Jahren:

$$(P_m - P_{m+1})\frac{1}{2} + (P_{m+1} - P_{m+2})\frac{3}{2} + (P_{m+2} - P_{m+3})\frac{5}{2} + \ldots$$

$$= \frac{P_m}{2} + P_{m+1} + P_{m+2} + P_{m+3} + \ldots.$$

folglich ist die mittlere Lebensdauer einer m jährigen Person

$$= \frac{1}{2} + \frac{P_{m+1} + P_{m+2} + P_{m+3} + \ldots.}{P_m},$$

d. h. **die mittlere Lebensdauer einer Person wird erhalten, wenn man mit der Anzahl der im gegebenen Alter Lebenden in die Summe aller vom nächst höheren Lebensalter an bis zum höchsten Alter Lebenden dividirt und zum Quotienten $\frac{1}{2}$ addirt.**

Für obiges Beispiel erhält man somit genauer

$$\frac{1}{2} + \frac{14 + 12 + 10 + 8 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}{17}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{65}{17} = \frac{147}{34} = 4\tfrac{11}{34} \text{ Jahre} = 4 \text{ Jahre } 3\tfrac{15}{17} \text{ Mon.}$$

§. 31. Ehedauer.

Unter **Ehedauer** versteht man die Anzahl der Jahre, welche ein Ehepaar **zusammen** durchleben wird. Angenommen der Mann sei m Jahre, die Frau n Jahre alt, so ist die Wahrscheinlichkeit noch v Jahre zu leben

$$\text{für den Mann} = \frac{P_{m+v}}{P_m},$$

$$\text{für die Frau} = \frac{P_{n+v}}{P_n},$$

also nach §. 25 die Wahrscheinlichkeit, daß beide nach v Jahren noch am Leben sein werden:

$$= \frac{P_{m+v}}{P_m} \cdot \frac{P_{n+v}}{P_n},$$

daß beide nicht zugleich mehr leben werden:

$$= 1 - \frac{P_{m+v}}{P_m} \cdot \frac{P_{n+v}}{P_n},$$

daß der Mann noch leben, die Frau aber gestorben sein werde:

$$= \frac{P_{m+v}}{P_m}\left(1 - \frac{P_{n+v}}{P_n}\right),$$

daß der Mann gestorben sein werde, die Frau aber noch lebe:

$$= \left(1 - \frac{P_{m+v}}{P_m}\right)\frac{P_{n+v}}{P_n},$$

daß beide gestorben sein werden:

$$= \left(1 - \frac{P_{m+v}}{P_m}\right)\left(1 - \frac{P_{n+v}}{P_n}\right),$$

und schließlich daß noch nicht beide gestorben sein werden:

$$= 1 - \left(1 - \frac{P_{m+v}}{P_m}\right)\left(1 - \frac{P_{n+v}}{P_n}\right).$$

Beispiel.

Man soll die Wahrscheinlichkeit der Ehedauer eines Ehepaares für die nächsten 18 Jahre berechnen, wenn der Mann 37, die Frau dagegen 32 Jahre alt ist.

Auflösung.

Man erhält für die Wahrscheinlichkeit, daß beide nach 18 Jahren noch am Leben sein werden:

$$\frac{255}{395} \cdot \frac{300}{427} = \frac{15300}{33733} = 0{,}4535,$$

daß beide nicht zugleich mehr leben werden:

$$1 - \frac{255}{395} \cdot \frac{300}{427} = \frac{18433}{33733} = 0{,}5464,$$

daß der Mann noch leben, die Frau aber gestorben sein werde:

$$\frac{255}{395}\left(1 - \frac{300}{427}\right) = \frac{6477}{33733} = 0{,}192,$$

daß der Mann gestorben sein werde, die Frau aber noch lebe:

$$\left(1 - \frac{255}{395}\right) \frac{300}{427} = \frac{8400}{33733} = 0{,}249,$$

daß beide gestorben sein werden:

$$\left(1 - \frac{255}{395}\right)\left(1 - \frac{300}{427}\right) = \frac{3556}{33733} = 0{,}1054,$$

daß noch nicht beide gestorben sein werden:

$$1 - \frac{140}{395} \cdot \frac{127}{427} = \frac{30177}{33733} = 0{,}8945.$$

Hiernach ist es also am wahrscheinlichsten, daß eine von den beiden Personen noch am Leben sein werde; daß beide zugleich nach 18 Jahren noch leben werden, ist unwahrscheinlich, da $0{,}4535 < \frac{1}{2}$ ist.

§. 32. Wahrscheinliche Ehedauer.

Unter wahrscheinlicher Ehedauer versteht man die Anzahl von Jahren, nach deren Verfluß die Wahrscheinlichkeit, daß die Ehe noch bestehe, ebenso groß ist, als die Wahrscheinlichkeit, daß sie aufgelöst sein werde.

Bezeichnen wir für ein Ehepaar diese wahrscheinliche Ehedauer durch x und ist der Mann m, die Frau n Jahre alt, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß beide nach x Jahren noch am Leben sein werden:

$$= \frac{P_{m+x}}{P_m} \cdot \frac{P_{n+x}}{P_n}$$

und daß beide nicht zugleich mehr leben werden:

$$= 1 - \frac{P_{m+x}}{P_m} \cdot \frac{P_{n+x}}{P_n}.$$

Da nun beide Wahrscheinlichkeiten einander gleich sein sollen, so setze man:

$$\frac{P_{m+x}}{P_m} \cdot \frac{P_{n+x}}{P_n} = 1 - \frac{P_{m+x}}{P_m} \cdot \frac{P_{n+x}}{P_n}$$

und bestimme hieraus

$$P_{m+x} \cdot P_{n+x} = \frac{1}{2} P_m \cdot P_n.$$

Um also x zu finden, bilde man das Produkt aus der Anzahl der im Alter des Ehepaares Lebenden und zähle nun von hier an in der Sterblichkeitstabelle um so viel Jahre fort, bis bei der betreffenden Alterszahl eine Anzahl von Lebenden angegeben ist, welche der Hälfte jenes Produktes gleichkommt.

Beispiel.

Wie groß ist die wahrscheinliche Ehedauer eines Ehepaares, wenn der Mann 34, die Frau dagegen 27 Jahre alt ist?

Auflösung.

Hier ist $P_m = P_{34} = 415$, $P_n = P_{27} = 456$, folglich $\frac{1}{2} P_m P_n = \frac{415 . 456}{2} = 94620$. Nehmen wir nun $x = 10$, so wird $P_{m+x} . P_{n+x} = P_{44} . P_{37} = 346 . 395 = 136670$, also viel zu groß. Wählen wir darum $x = 18$, so wird

$$P_{m+x} . P_{n+x} = P_{52} . P_{45} = 282 . 339 = 95598,$$

also noch etwas zu groß. Da aber für $x = 19$

$$P_{m+x} P_{n+x} = P_{53} . P_{46} = 273 . 332 = 90636,$$

also zu klein ist, so liegt die wahrscheinliche Ehedauer zwischen 18 und 19 Jahren.

Um den zu 18 Jahren fehlenden Theil y Monate zu berechnen, bilde man die Proportion:

$$95598 - 90636 : 95598 - 94620 = 12 : y,$$

so folgt hieraus:

$$y = \frac{978 . 12}{4962} = 2 \text{ Monate (nahezu).}$$

§. 33. Mittlere Ehedauer.

Nach dem in §. 30 über die mittlere Lebensdauer Mitgetheilten geht klar hervor, was man unter mittlerer Ehedauer zu verstehen hat und daß dieselbe für ein Ehepaar, wenn der Mann m Jahre, die Frau dagegen n Jahre alt ist, ausgedrückt sein wird durch:

$$\frac{1}{2} + \frac{P_{m+1} . P_{n+1} + P_{m+2} . P_{n+2} + P_{m+3} . P_{n+3} + \dots}{P_m . P_n}$$

Beispiel.

Wie groß ist die mittlere Ehedauer, wenn der Mann 84, die Frau aber 80 Jahre alt ist?

Auflösung.

Man findet nach der in §. 29 gegebenen Tabelle für die mittlere Ehedauer

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{20 . 37} (17 . 32 + 14 . 28 + 12 . 24 + 10 . 20 + 8 . 17 + 6 . 14 + 5 . 12 + 4 . 10 + 3 . 8 + 2 . 6 + 1 . 5)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{740}(544 + 392 + 288 + 200 + 136 + 84 + 60 + 40 + 24 + 12 + 5)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1785}{740} = \frac{431}{148} = 2{,}91 \text{ Jahre.}$$

§. 34. Die Wahrscheinlichkeit a posteriori.

Bei allen bisherigen Wahrscheinlichkeitsbestimmungen war das Verhältniß der günstigen zu den möglichen Fällen auf rechnendem Wege bestimmbar. Muß dasselbe aber erst aus Beobachtungen und Erfahrungen hergeleitet, also auf empirische Weise ermittelt werden, so wird die sich hierauf stützende Wahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit a posteriori genannt und im Gegensatze zu dieser heißt die bisher behandelte die Wahrscheinlichkeit a priori oder die Wahrscheinlichkeit aus Gründen. Es ist klar, daß die Wahrscheinlichkeit a posteriori nur eine annähernde ist und daß dieselbe sich der wirklichen Wahrscheinlichkeit um so mehr nähert, je mehr Beobachtungen in Bezug auf die Bestimmung des Eintreffens des Ereignisses angestellt wurden.

Um nun einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir annehmen, man habe aus einer Urne, in welcher sich 5 Kugeln von schwarzer und weißer Farbe befinden, fünfmal nach einander Kugeln gezogen, nachdem jede gezogene Kugel sofort wieder in die Urne geworfen worden war, und dadurch 3 schwarze und 2 weiße Kugeln erhalten. Es soll nun hieraus bestimmt werden, wie viel Kugeln von jeder Farbe sich in der Urne befinden.

Es ist zunächst klar, daß nur vier verschiedene Annahmen oder Hypothesen möglich sind. Die Urne kann nämlich enthalten:

a) 4 schwarze und 1 weiße,
b) 3 „ „ 2 „
c) 2 „ „ 3 „
d) 1 „ „ 4 „ Kugeln.

Bezeichnen wir nun durch W_1 die Wahrscheinlichkeit eine schwarze, durch W_2 die eine weiße Kugel zu ziehen, so ist nach der ersten Hypothese:

$$W_1 = \frac{4}{5},\ W_2 = \frac{1}{5},$$

nach der zweiten Hypothese:

$$W_1 = \frac{3}{5},\ W_2 = \frac{2}{5},$$

nach der dritten Hypothese:

$$W_1 = \frac{2}{5},\ W_2 = \frac{3}{5},$$

nach der vierten Hypothese:

$$W_1 = \frac{1}{5},\ W_2 = \frac{4}{5}.$$

Um nun obige vier Hypothesen in Bezug auf ihre Wahrscheinlichkeit zu untersuchen, kehren wir zu dem zusammengesetzten Ereignisse, 3 schwarze und 2 weiße Kugeln zu ziehen, zurück und bestimmen die Wahrscheinlichkeit, welche sich für dasselbe aus jeder der Hypothesen ergibt.

Nach §. 27 ist diese aber ausgedrückt durch

$$W = \binom{n}{m} W_1^{n-m}\ W_2^m = \binom{5}{2} W_1^3 W_2^2 = 10 W_1^3 W_2^2$$

und es wird hiernach die fragliche Wahrscheinlichkeit

nach der *ersten* Hypothese:

$$W'_1 = 10 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{640}{3125} = \frac{128}{625},$$

nach der *zweiten* Hypothese:

$$W'_2 = 10 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1080}{3125} = \frac{216}{625},$$

nach der *dritten* Hypothese:

$$W'_3 = 10 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{720}{3125} = \frac{144}{625},$$

nach der *vierten* Hypothese:

$$W'_4 = 10 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{160}{3125} = \frac{32}{625},$$

woraus wir schließen, daß die *zweite* Hypothese die wahrscheinlichere sei.

Bestimmen wir nun die *relativen* Wahrscheinlichkeiten dieser Hypothesen, so erhalten wir dafür nach §. 24 der Reihe nach:

$$1)\ W''_1 = \frac{128}{128 + 216 + 144 + 32} = \frac{128}{520} = \frac{16}{65},$$

$$2)\ W''_2 = \frac{216}{520} = \frac{27}{65},$$

$$3)\ W''_3 = \frac{144}{520} = \frac{18}{65},$$

$$4)\ W''_4 = \frac{32}{520} = \frac{4}{65}.$$

Nun verhält sich aber

$$\frac{16}{65} : \frac{27}{65} : \frac{18}{65} : \frac{4}{65} = \frac{128}{625} : \frac{216}{625} : \frac{144}{625} : \frac{32}{625}$$

oder $W''_1 : W''_2 : W''_3 : W''_4 = W'_1 : W'_2 : W'_3 : W'_4$,

woraus wir folgenden Schluß ziehen:

Die Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen verhalten sich wie die aus ihnen hervorgehenden absoluten Wahrscheinlichkeiten der beobachteten Ereignisse.

Wir bezeichnen hiernach diejenige Hypothese als die wahrscheinlichste, für welche die Wahrscheinlichkeit eines besonders bezeichneten Ereignisses den größten Werth hat.

Stellen wir uns nun die Lösung der Aufgabe:

„Wie groß ist unter den vorhin gemachten Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit, bei einem sechsten Zuge eine schwarze Kugel zu ziehen“

so haben wir zunächst für den Fall, daß sich in der Urne wirklich 3 schwarze und 2 weiße Kugeln befinden, die verlangte Wahrscheinlichkeit $= \frac{3}{5}$, da aber die Wahrscheinlichkeit dieser Hypothese nach Obigem selbst $= \frac{27}{65}$ ist, so folgt für die aus beiden Wahrscheinlichkeiten zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit

$$W_1''' = \frac{3}{5} \cdot \frac{27}{65} = \frac{81}{325}.$$

Analog findet man unter Voraussetzung der ersten Hypothese die Wahrscheinlichkeit für den Zug einer schwarzen Kugel:

$$W_2''' = \frac{4}{5} \cdot \frac{16}{65} = \frac{64}{325},$$

unter Voraussetzung der dritten Hypothese:

$$W_3''' = \frac{2}{5} \cdot \frac{18}{65} = \frac{36}{325},$$

unter Voraussetzung der vierten Hypothese:

$$W_4''' = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{65} = \frac{4}{325}.$$

Nach §. 22. 4. ist somit die zu bestimmende Wahrscheinlichkeit des Zuges einer schwarzen Kugel bei einer sechsten Ziehung:

$$= W_1''' + W_2''' + W_3''' + W_4'''$$

$$= \frac{81}{325} + \frac{64}{325} + \frac{36}{325} + \frac{4}{325} = \frac{185}{325} = \frac{37}{65}.$$

Anmerkung. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung findet ihre schönste Anwendung bei der Bestimmung begangener Fehler bei Beobachtungen sowie deren Ausgleichung.

Die Untersuchungen erfordern jedoch Kenntniß der höheren Mathematik und müssen hier übergangen werden.

§. 35. Aufgaben zur Uebung.

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine in die Höhe geworfene Münze mit der Schrift nach oben gekehrt auffällt?

2) Behufs der Verloosung eines Gegenstandes wurden 400 Loose gemacht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, denselben zu gewinnen, wenn man 8 solcher Loose ankauft?

3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln einen Pasch, d. h. zwei gleiche Augen zu werfen?

4) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 10 zu werfen?

5) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 11 zu werfen?

6) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, aus einem Piquetspiele auf den ersten Zug einen König zu ziehen?

7) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem gemischten Piquetspiele eine Karte von schwarzer Farbe zu ziehen?

8) In einer Urne befinden sich 6 schwarze und 10 weiße Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus derselben auf den ersten Zug a) eine schwarze, b) eine weiße Kugel zu ziehen?

9) In einer Urne befinden sich 8 schwarze, 3 weiße, 9 rothe, 10 blaue und 6 gelbe Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf den ersten Griff eine rothe zu erhalten?

10) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem gemischten Piquetspiele auf einen Zug a) 2 Coeurs, b) 3 Könige, c) 4 Karten von rother Farbe zu ziehen?

11) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem gemischten Piquetspiele auf einen Zug a) 5 Karten von einer Farbe (d. h. 5 Coeurs oder dgl.), b) 3 Karten von gleichem Werthe, c) 3 Karten von verschiedener Farbe zu ziehen?

12) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, in welcher sich 5 schwarze, 7 weiße, 6 blaue, 8 rothe und 10 gelbe Kugeln befinden, auf den ersten Zug a) eher eine rothe als eine schwarze, b) eher eine gelbe als eine schwarze oder weiße Kugel zu bekommen?

13) In einer Urne befinden sich 10 schwarze, 3 weiße, 7 rothe und 11 gelbe Kugeln. Wenn man nun auf den ersten Griff zwei derselben herausnimmt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese eher eine schwarze und eine weiße, als eine rothe und eine gelbe seien?

14) Aus einem gemischten Piquetspiele wird eine Karte gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese eher ein Bild sei, als ein Aß?

15) A, B, C und D spielen mit Piquetkarten. A theilt dieselben in der Weise aus, daß jeder der vier Spieler 8 Karten

erhält und die letzte Trumpf ist. Man soll berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß D eher nur einen Trumpf, als vier und nicht mehr Karten von derselben Farbe erhalte?

16) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem gemischten Tarokspiele von 54 Karten zuerst eine Tarokkarte und hierauf einen König zu ziehen?

17) Aus einem gemischten Piquetspiele werden 7 Karten gezogen; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich unter diesen 4 Coeurs befinden?

18) Es besetzt Jemand in der gewöhnlichen Zahlenlotterie von 90 Numern alle in 12 Numern enthaltenen Amben, Ternen, Quaternen und Quinten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er a) eine Ambe, b) eine Terne, c) eine Quaterne, d) eine Quinte gewinnt, wenn 5 Numern gezogen werden?

19) Es besetzt Jemand in der gewöhnlichen Zahlenlotterie 20 Numern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich unter den 5 Treffern a) eine und auch nur eine, b) nur zwei der besetzten Numern befinden?

20) Aus einem gemischten Tarokspiele von 54 Karten werden 11 derselben gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich darunter 5 von den vorhandenen 8 Coeurs befinden?

21) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel die Zahl 1 fünfmal nach einander zu werfen?

22) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln auf einen Wurf die Zahlen 5 und 6 zu werfen?

23) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 4 Würfeln auf einen Wurf die Zahlen 1, 2, 3 und 4 zu werfen?

24) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel in 3 auf einander folgenden Würfen die Zahlen 4, 5 und 6 zu werfen?

25) Der höchste Wurf mit 3 Würfeln gewinnt. A und B haben bereits jeder 14 geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß C gewinnt?

26) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit a) mit 4, b) mit 5, c) mit 6 Würfeln zwei und nur zwei gleiche Augen zu werfen?

27) In jeder von 4 Urnen befinden sich 6 von 1 bis 6 numerirte Kugeln von gleicher Farbe; wie groß ist die Wahr-

scheinlichkeit, auf den ersten Griff eine Kugel von bestimmter Farbe und bestimmter Numer zu erhalten, wenn man nicht weiß, wie die Kugeln der Farbe nach in den Urnen vertheilt sind?

28) Die erste von zwei Urnen A und B enthält 7 schwarze und 6 blaue, die andere B 5 schwarze und 9 blaue Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, blindlings eine schwarze Kugel zu ergreifen?

29) In einer Urne befinden sich 12 schwarze und 6 weiße Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich unter 7 gezogenen Kugeln 5 schwarze befinden?

30) Aus einem gemischten Piquetspiele von 32 Karten wird zweimal eine Karte gezogen; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter den gezogenen Karten von den Königen oder Damen wenigstens eine sei?

31) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß aus einem gemischten Tarokspiele von 54 Karten nach dreimaligem Ziehen wenigstens eine von den Königen, oder den Coeurs, oder eine von den Tarokkarten selbst sich befindet?

32) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel viermal nach einander die Zahl 6 zu werfen?

33) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mit 2 Würfeln bei zweimaligem Werfen wenigstens einer der Würfe 7 oder 5 fällt?

34) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel unter 5 Würfen zweimal dieselbe Anzahl Augen zu werfen?

35) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Geldstück, welches sechsmal in die Höhe geworfen wird, dreimal mit dem Kopfe nach oben fällt?

36) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel bei fünfmaligem Werfen *wenigstens* dreimal die gleiche Zahl zu werfen?

37) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Gefäße, in welchem sich 6 schwarze und 3 weiße Kugeln befinden, in 8 Zügen 6 schwarze und 2 weiße Kugeln zu ziehen, wenn nach jedem Zuge die Kugel wieder in das Gefäß zurückgelegt wird?

38) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel

bei fünfmaligem Werfen nicht mehr als viermal, aber auch nicht weniger als zweimal die Zahl 6 zu werfen?

39) A wettet, aus einem gemischten Piquetspiele auf den ersten Zug ein Bild zu ziehen und setzt 1 Mk. ein, B behauptet das Gegentheil. Wie viel hat B dagegen zu setzen?

40) A wettet, mit zwei Würfeln auf den ersten Wurf 9 zu werfen, B dagegen, aus einer Urne, in welcher sich 3 schwarze und 15 weiße Kugeln befinden, auf den ersten Zug eine schwarze Kugel zu ziehen; wie müssen sich die Einsätze von A und B zu einander verhalten?

41) Es wettet Jemand, aus einem gemischten Piquetspiele unmittelbar nach einander ein Aß und einen König von der gleichen Farbe zu ziehen und erhält im Falle des Eintreffens $20^1/_3$ Mark als Gewinn; wie viel kann er dagegen setzen?

42) Es setzt Jemand 2 Mk. ein und behauptet mit 4 Würfeln drei und nur drei gleiche Zahlen zu werfen; welcher Gewinn muß ihm im Falle des Eintreffens zu Theil werden?

43) A würfelt mit B mit einem Würfel in der Weise, daß A 5 Mk. einsetzt, von B aber immer so viel Mark erhält, als er Augen wirft. Ist dieses Spiel ein zu billigendes und wenn nicht, wer ist alsdann im Vortheil?

44) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine 30jährige Person noch 30 Jahre lang lebt?

45) Welche Wahrscheinlichkeit hat eine 37jährige Person, 72 Jahre alt zu werden?

46) Welche Wahrscheinlichkeit hat eine 36jährige Person, 61 Jahre alt zu werden?

47) Wie groß ist die wahrscheinliche Lebensdauer einer 47jährigen Person?

48) Der Mann eines Ehepaares ist jetzt 40 Jahre, die Frau dagegen 32 Jahre alt. Man soll für die nächsten 15 Jahre die Wahrscheinlichkeit berechnen: a) daß beide noch leben; b) daß beide nicht zugleich mehr leben werden; c) daß der Mann noch leben, die Frau aber gestorben sein werde; d) daß der Mann gestorben sein werde, die Frau aber noch leben werde; e) daß beide gestorben; f) daß noch nicht beide gestorben sein werden.

49) Wie groß ist die wahrscheinliche Ehedauer, wenn der Mann 42 Jahre, die Frau dagegen 37 Jahre alt ist?

50) Die mittlere Ehedauer eines Ehepaares zu berechnen, wenn der Mann 86, die Frau 82 Jahre alt ist?

51) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Ehegatten, von welchen der eine 32, der andere 37 Jahre zählt, noch 25 Jahre zusammen leben?

52) Die Aeltern eines Kindes von 10 Jahren sind 38 und 30 Jahre alt; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese drei Familienglieder noch 20 Jahre zusammen leben?

53) Eine Familie besteht aus 6 Gliedern. Der Vater ist 37, die Mutter 31 Jahre und die 4 Kinder sind der Reihe nach 10, 8, 4 und 2 Jahre alt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sämmtliche Familienglieder noch leben, wenn das jüngste Kind 20 Jahre alt geworden ist?

54) In einer Urne befinden sich 5 Kugeln von schwarzer und weißer Farbe. Nach viermaligem Ziehen — wobei jedesmal die gezogene Kugel wieder in die Urne gelegt worden war — hat man 3 schwarze und 2 weiße Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man bei einem fünften Zuge wieder eine schwarze Kugel erhält?

Vierter Abschnitt.

Von den Rechnungsarten, welche sich auf die menschliche Sterblichkeit gründen.

A. Berechnung der Aussteuerversicherungseinlagen.

§. 36. Erklärung.

Bei der Aussteuerversicherung wird gegen eine einmalige, oder jährliche Einlage, sogenannte Prämie, einem Kinde, sobald dasselbe ein festgesetztes Alter erreicht hat, von der Versicherungsanstalt eine bestimmte Summe ausbezahlt. Die Prämienzahlung geschieht in der Regel zu Anfang eines jeden Jahres, die Auszahlung von Seiten der Anstalt am Ende der festgesetzten Zeit. Geschieht die Versicherung in der Weise, daß, im Falle das versicherte Kind stirbt, bevor es das festgesetzte Alter erreicht hat, die Versicherungsanstalt wieder die bereits eingezahlten Beträge ohne Zinsen zurückzugeben hat, so erhebt dieselbe noch eine sogenannte Zusatzprämie.

Statt aller weiteren Erörterungen wollen wir die wichtigsten der hier in Betracht kommenden Fälle nachstehend als allgemeine Aufgaben behandeln und durch Beispiele erläutern.

a. Berechnung bei einmaliger Einlage.

§. 37. Aufgabe.

Welche Einlage k_m ist jetzt für ein mjähriges Kind in eine Aussteuerversicherungsanstalt zu machen,

wenn demselben bei erreichtem nten Lebensjahre ein Kapital K ausbezahlt werden soll und der Zinsfuß zu p % berechnet wird?

Auflösung.

Nehmen wir an, daß gleichzeitig P_m m jährige Kinder versichert werden, so erhebt die Versicherungsanstalt P_m Einlagen und ihre baare Einnahme ist somit

$$= P_m \,.\, k_m.$$

Von diesen P_m Kindern erreichen aber nur P_n das nte Lebensalter, also kommen nur P_n Versicherungssummen zur Auszahlung und der baare Werth der Ausgaben der Anstalt ist daher

$$= \frac{P_n \,.\, K}{1{,}0p^{n-m}}.$$

Setzt man nun die Einnahmen gleich den Ausgaben, so ergibt sich die Gleichung

$$P_m \,.\, k_m = \frac{P_n \,.\, K}{1{,}0p^{n-m}}$$

und hieraus die baare Einlage

$$k_m = \frac{P_n}{P_m} \cdot \frac{K}{1{,}0p^{n-m}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Um dieser Gleichung (1) eine für die praktische Rechnung und tabellarische Zusammenstellung bequemere Form zu geben, schreibe man dafür

$$k_m = \frac{P_n}{P_m} \cdot \frac{1{,}0p^m}{1{,}0p^n} \,.\, K$$

oder

$$k_m = \frac{\frac{P_n}{1{,}0p^n}}{\frac{P_m}{1{,}0p^m}} \,.\, K \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2).$$

Nun sind aber

$$\frac{P_n}{1{,}0p^n} \text{ und } \frac{P_m}{1{,}0p^m}$$

offenbar nichts Anderes als die baaren Werthe von bezüglich P_n und P_m Kapitaleinheiten für n und m Jahre zurückgeführt, also zur Zeit der Geburt. Setzen wir zur Abkürzung allgemein

$$\frac{P_n}{1{,}0p^n} = \mathfrak{p}_n \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3),$$

so geht obige Gleichung (2) über in

$$k_m = \frac{\mathfrak{p}_n}{\mathfrak{p}_m} \cdot K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Es ist klar, daß wenn man nach Gleichung (3) sämmtliche Werthe von $\mathfrak{p}_n$ nach der Sterblichkeitstabelle für alle Werthe von $n = 0$ bis $n = 96$ bestimmt und tabellarisch zusammenstellt, die jedesmalige Berechnung von k_m nach Gleichung (4) auf eine einfache Rechnungsoperation zurückgeführt ist. Wir haben diese Werthbestimmungen mit Zugrundelegung der Baumann-Süßmilch'schen Sterblichkeitstabelle für $p = 3$ und $p = 4$ ausgeführt und in den am Ende des Buches befindlichen Tabellen I und II zusammengestellt.

Anmerkungen. 1) Das Verhältniß $\frac{P_n}{P_m}$, also auch das von $\frac{\mathfrak{p}_n}{\mathfrak{p}_m}$, bleibt für bestimmte Werthe von n und m stets dasselbe, und es ist somit in Bezug auf den Werth der Einlage gleichgiltig, wie viel Kinder sich in einem gewissen Alter bei der Versicherung betheiligen.

2) Die Einlage k_m wird in Wirklichkeit von der Versicherungsanstalt natürlich etwas höher berechnet, um die Verwaltungskosten und dgl. decken zu können. Hierüber ist aus den Statuten der betreffenden Anstalten das Nähere zu ersehen.

Beispiele.

1) Ein Kind ist gegenwärtig 5 Jahre alt. Man will demselben bei erreichtem 18ten Lebensjahre eine Summe von 1200 Mark sichern; welche Einlage hat man jetzt zu machen, wenn der Zinsfuß zu 3% berechnet wird?

Erste Auflösung.

Wenden wir die Gleichung (1) an und setzen daselbst

$$m = 5;\ n = 18;\ K = 1200;\ p = 3,$$
$$P_m = P_5 = 579;\ P_n = P_{18} = 499;$$

so folgt:
$$k_5 = \frac{499}{579} \cdot \frac{1200}{1{,}03^{13}} = 704{,}23 \text{ Mark.}$$

Zweite Auflösung.

Nach Gleichung (4) ist

$$k_5 = \frac{\mathfrak{p}_{18}}{\mathfrak{p}_5} \cdot K,$$

oder da nach Tabelle I

$$\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_{18} = 293{,}1100000$$
$$\mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}_5 = 499{,}4506923,$$

so folgt:

$$k_5 = \frac{293{,}11}{499{,}4506923} \cdot 1200 = 704{,}23 \text{ Mark,}$$

wie vorhin.

2) Welche Einlage hat man bei der Geburt eines Kindes zu machen, um demselben nach erlangtem 20ten Jahre eine Summe von 1000 Mk. zuzusichern, bei Berechnung eines $3\frac{1}{2}$ prozentigen Zinsfußes?

Auflösung.

Setzt man

$$m = 0;\ n = 20;\ K = 1000;\ p = 3\tfrac{1}{2};$$
$$P_m = P_0 = 1000;\ P_n = P_{20} = 491;$$

so folgt aus Gleichung (1)

$$k_0 = \frac{491}{1000} \cdot \frac{1000}{1{,}035^{20}} = \frac{491}{1{,}9897888} = 246{,}76 \text{ Mk.}$$

§. 38. Aufgabe.

Welche Zusatzprämie z_m muß eine Aussteuerversicherungsgesellschaft nehmen, um die im mten Lebensjahre eines Kindes bezahlte Einlage k_m, im Fall dasselbe vor erreichtem nten Lebensalter sterben sollte, zu dieser Zeit zurückerstatten zu können.

Auflösung.

Die Anstalt erhebt von P_m gleichzeitig versicherten Kindern

$$P_m \,.\, z_m$$

an Zusatzprämien. Von diesen P_m Kindern erreichen aber nur P_n das nte Lebensalter, also hat die Anstalt $(P_m - P_n)$ Versicherungsprämien zu vergüten. Der baare Werth ihrer Ausgaben ist demnach

$$= \frac{k_m(P_m - P_n)}{1{,}0p^{n-m}}.$$

Setzt man nun die Einnahmen und die Ausgaben einander gleich, so erhält man die Gleichung

$$P_m \,.\, z_m = \frac{k_m(P_m - P_n)}{1{,}0p^{n-m}}$$

und hieraus die verlangte Zusatzprämie

$$z_m = \frac{k_m(P_m - P_n)}{P_m \,.\, 1{,}0p^{n-m}}$$
$$= \frac{k_m}{1{,}0p^{n-m}}\left(1 - \frac{P_n}{P_m}\right) \ldots\ldots (1)$$
$$= k_m \left(\frac{1}{1{,}0p^{n-m}} - \frac{\frac{P_n}{1{,}0p^n}}{\frac{P_m}{1{,}0p^m}}\right)$$

oder nach §. 37. (3):

$$z_m = k_m \left(\frac{1}{1,0p^{n-m}} - \frac{\mathfrak{p}_n}{\mathfrak{p}_m}\right) \ldots\ldots (2).$$

Beispiele.

1) Wie groß ist die von einer Anstalt zu berechnende Zusatzprämie, damit dieselbe eine im 6ten Lebensjahre eines Kindes entrichtete Einlage von 100 Mk. im 20ten Jahre wieder zurückerstatten kann, wenn 3 prozentige Zinsen berechnet werden?

Erste Auflösung.

Setzt man in der Formel (1)

$m = 6$; $n = 20$; $k_m = 100$; $p = 3$; $P_m = P_6 = 567$; $P_n = P_{20} = 491$;

so folgt:

$$z_6 = \frac{100}{1,03^{14}}\left(1 - \frac{491}{567}\right) = 8,861 \text{ Mk.}$$

Zweite Auflösung.

Da $\frac{1}{1,0p^{n-m}} = \frac{1}{1,03^{14}} = 0,6611178$

$$\frac{\mathfrak{p}_n}{\mathfrak{p}_m} = \frac{\mathfrak{p}_{20}}{\mathfrak{p}_6} = \frac{271,8551250}{474,8537654} = 0,572503,$$

so wird nach Gleichung (2)

$$z_6 = 100\,(0,6611178 - 0,572503) = 8,8615 \text{ Mk.}$$

2) Welche Zusatzprämie muß eine Versicherungsanstalt bei 3 prozentigem Zinsfuße in Rechnung bringen, wenn sie die bei der Geburt eines Kindes bezahlte Prämie von 50 Mk. im 24ten Jahre zurückbezahlen soll?

Erste Auflösung.

Setzt man in Gleichung (1)

$m = 0$; $n = 24$; $k_m = 50$; $1,0p = 1,03$; $P = P_0 = 1000$; $P_n = P_{24} = 471$;

so folgt

$$z_0 = \frac{50}{1,03^{24}}\left(1 - \frac{471}{1000}\right) = 13,011 \text{ Mk.}$$

Zweite Auflösung.

Nach Gleichung (2) ist:

$$z_0 = 50\left(\frac{1}{1{,}03^{24}} - \frac{\mathfrak{p}_{24}}{\mathfrak{p}_0}\right)$$
$$= 50\left(0{,}4919337 - \frac{231{,}7011053}{1000}\right)$$
$$= 50(0{,}4919337 - 0{,}2317011)$$
$$= 50 . 0{,}2602326 = 13{,}011 \text{ Mk.}$$

§. 39. Aufgabe.

Ein Kind wurde im mten Lebensjahre mit einer Einlage k_m versichert. Welche Zusatzprämie Z_m hat die Versicherungsanstalt zu berechnen, wenn sie, im Falle das Kind das nte Lebensjahr nicht erreicht, zu dieser Zeit die Einlage k_m sammt der Zusatzprämie zurückbezahlen soll?

Auflösung.

Nach der Gleichung (1) des vorhergehenden Paragraphen erhält man unmittelbar die Gleichung

$$Z_m = \frac{k_m + Z_m}{1{,}0p^{n-m}}\left(1 - \frac{P_n}{P_m}\right)$$

und hieraus

$$Z_m = \frac{k_m\left(1 - \frac{P_n}{P_m}\right)}{1{,}0p^{n-m} - 1 + \frac{P_n}{P_m}} = \frac{k_m}{\frac{1{,}0p^{n-m}}{1 - \frac{P_n}{P_m}} - 1}$$

oder

$$Z_m = \frac{k_m}{\frac{P_m . 1{,}0p^{n-m}}{P_m - P_n} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Ebenso erhält man aus Gleichung (2) des §. 38 für vorliegenden Fall:

$$Z_m = (k_m + Z_m)\left(\frac{1}{1{,}0p^{n-m}} - \frac{\mathfrak{p}_n}{\mathfrak{p}_m}\right)$$

und findet hieraus:

$$Z_m = \frac{k_m}{\frac{\mathfrak{p}_m . 1{,}0p^{n-m}}{\mathfrak{p}_m - \mathfrak{p}_n . 1{,}0p^{n-m}} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Zusatz.

Unter Berücksichtigung der Werthe der einfachen Zusatzprämie z_m in §. 38 (1) und (2) läßt sich der Werth von Z_m in vorstehenden Gleichungen (1) und (2) auch ausdrücken durch

$$Z_m = \frac{k_m}{\frac{k_m}{z_m} - 1} = \frac{k_m \,.\, z_m}{k_m - z_m} \quad \ldots\ldots (3)$$

Beispiel.

Wie hoch berechnet sich die Zusatzprämie für das erste Beispiel des §. 38, wenn außer der Einlage auch noch die Zusatzprämie zurückgegeben werden soll?

Auflösung.

Da nach jenem Beispiele

$$z_m = 8{,}8615 \text{ Mk.}$$

ist, so wird nach (3) die verlangte Zusatzprämie

$$Z = \frac{8{,}8615 \,.\, 100}{100 - 8{,}8615} = \frac{886{,}15}{91{,}1385} = 9{,}72 \text{ Mk.}$$

b) Berechnung bei jährlicher Einlage.

§. 40. Aufgabe.

Welche Prämie k'_m ist für ein Kind vom Antritt seines mten Lebensjahres an praenumerando jährlich zu entrichten, wenn demselben nach erreichtem nten Lebensjahre eine Summe K ausbezahlt werden soll und bei der Berechnung ein Zinsfuß von p% zu Grunde gelegt wird?

Auflösung.

Nehmen wir an, daß zu gleicher Zeit P_m mjährige Kinder versichert werden, so leben zu Anfang des

1ten, 2ten, 3ten, ... Jahres

P_m, P_{+1}, P_{m+2}, ...

Kinder und die Anstalt erhält somit der Reihe nach an Prämien:

$$k'_m \,.\, P_m\,,\; k'_m \,.\, P_{m+1}\,,\; k'_m \,.\, P_{m+2}\,,\; \ldots$$

welche bis zum erreichten nten Jahre bezüglich anwachsen zu

$$k'_m . P_m . 1{,}0p^{n-m}, k'_m . P_{m+1} . 1{,}0p^{n-m-1}, k'_m . P_{m+2} . 1{,}0p^{n-m-2}, \ldots$$

Der Werth sämmtlicher Prämien der im mten Lebensalter versicherten Kinder ist demnach bei erreichtem nten Jahre

$$= k'_m (P_m . 1{,}0p^{n-m} + P_{m+1} . 1{,}0p^{n-m-1} + P_{m+2} . 1{,}0p^{n-m-2} + \ldots . + P_{n-1} . 1{,}0p) \ldots \ldots . (1)$$

$$= k'_m . 1{,}0p^n \left(\frac{P_m}{1{,}0p^m} + \frac{P_{m+1}}{1{,}0p^{m+1}} + \frac{P_{m+2}}{1{,}0p^{m+2}} + \ldots + \frac{P_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}}\right)$$

oder wenn wir die Ausdrücke

$$\frac{P_m}{1{,}0p^m}, \frac{P_{m+1}}{1{,}0p^{m+1}}, \frac{P_{m+2}}{1{,}0p^{m+2}}, \frac{P_{m+3}}{1{,}0p^{m+3}}, \ldots \frac{P_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}}$$

analog wie früher, bezüglich durch

$$\mathfrak{p}_m, \quad \mathfrak{p}_{m+1}, \quad \mathfrak{p}_{m+2}, \quad \mathfrak{p}_{m+3}, \ldots \ldots \mathfrak{p}_{n-1}$$

bezeichnen und die nach der Sterblichkeitstabelle vom nten Lebensalter bis zum Schlusse fortgesetzte Summe

$$\mathfrak{p}_m + \mathfrak{p}_{m+1} + \mathfrak{p}_{m+2} + \mathfrak{p}_{m+3} + \ldots . = \Sigma\mathfrak{p}_m \ldots . (2)$$

setzen:

$$= k'_m . 1{,}0p^n (\Sigma\mathfrak{p}_m - \Sigma\mathfrak{p}_n) \ldots \ldots (3)$$

Da aber das nte Jahr nur von P_n Kindern erreicht wird, so hat die Versicherungsanstalt noch P_n Versicherungssummen oder eine Summe

$$= P_n . K \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

zu leisten. Aus der Gleichsetzung der beiden Ausdrücke (3) und (4) ergibt sich also die Gleichung

$$k'_m . 1{,}0p^n (\Sigma\mathfrak{p}_m - \Sigma\mathfrak{p}_n) = P_n . K$$

und hieraus die jährliche Prämie

$$k'_m = \frac{P_n . K}{(\Sigma\mathfrak{p}_m - \Sigma\mathfrak{p}_n) 1{,}0p^n} = \frac{\frac{P_n}{1{,}0p^n}}{\Sigma\mathfrak{p}_m - \Sigma\mathfrak{p}_n} . K$$

oder

$$k'_m = \frac{\mathfrak{p}_n}{\Sigma\mathfrak{p}_m - \Sigma\mathfrak{p}_n} . K \ldots \ldots . (5)$$

Anmerkungen. 1) Die Jahresprämie k'_m ist wieder von der Anzahl der zu gleicher Zeit der Anstalt beitretenden Personen unabhängig, indem das Verhältniß

$$\frac{\mathfrak{p}_n}{\Sigma\mathfrak{p}_m - \Sigma\mathfrak{p}_n}$$

für jede Anzahl von gleichzeitig versicherten Kindern dasselbe bleibt. Bei der Bestimmung des Werthes $\mathfrak{p}_n$ u. s. w. legt man deshalb wieder die Sterblichkeitstabelle zu Grunde.

2) Wie früher die baare Einlage, so wird auch in vorliegendem Falle die berechnete Prämie etwas zu niedrig ausfallen, indem die Anstalt, der Verwaltungskosten u. dgl. wegen, sich einen kleinen Zuschlag erlauben muß.

3) Hat man einmal die Werthe von

$$\Sigma\mathfrak{p}_0,\ \Sigma\mathfrak{p}_1,\ \Sigma\mathfrak{p}_2,\ \Sigma\mathfrak{p}_3, \ldots$$

berechnet, so hat man nicht mehr nothwendig, für jeden neuen Werth von m und n die durch Gleichung (1) ausgedrückte Summation vorzunehmen, weshalb auch für die praktische Anwendung die Formel (5) die zweckmäßigere ist. Bei der Bestimmung der Werthe von $\Sigma\mathfrak{p}_n$ beginnt man am vortheilhaftesten mit dem höchsten Alter, berechnet also der Reihe nach

$$\Sigma\mathfrak{p}_{95},\ \Sigma\mathfrak{p}_{94},\ \Sigma\mathfrak{p}_{93}, \ldots$$

und stellt solche tabellarisch zusammen.

Denn man hat

$$\begin{aligned}
\Sigma\mathfrak{p}_{95} &= \mathfrak{p}_{95} + \mathfrak{p}_{96} = \mathfrak{p}_{95}\\
\Sigma\mathfrak{p}_{94} &= \mathfrak{p}_{94} + \mathfrak{p}_{95}\\
\Sigma\mathfrak{p}_{93} &= \mathfrak{p}_{93} + \mathfrak{p}_{94} + \mathfrak{p}_{95}\\
&= \mathfrak{p}_{93} + \Sigma\mathfrak{p}_{94}\\
\Sigma\mathfrak{p}_{92} &= \mathfrak{p}_{92} + \mathfrak{p}_{93} + \mathfrak{p}_{94} + \mathfrak{p}_{95}\\
&= \mathfrak{p}_{92} + \Sigma\mathfrak{p}_{93} \text{ ꝛc.}
\end{aligned}$$

Auf diese Weise wurden die mit $\Sigma\mathfrak{p}_n$ überschriebenen Columnen der am Ende des Buches befindlichen Tabellen I und II berechnet.

Beispiel.

Welche Prämie ist für ein 12jähriges Kind jährlich zu entrichten, wenn demselben bei erreichtem 18ten Lebensjahre ein Kapital von 500 Mk. ausbezahlt werden soll und dem Zinsfuße 3 % zu Grunde gelegt werden?

Erste Auflösung.

Ohne Anwendung der Tabelle I erhält man durch Gleichsetzung der Ausdrücke (1) und (4), wenn man darin

$$m = 12,\ n = 18,\ K = 500,\ p = 3;$$
$$P_m = P_{12} = 523;\ P_n = P_{18} = 499$$

setzt:

$$499 \,.\, 500 = k'_{12}\,(523 \,.\, 1{,}03^6 + 519 \,.\, 1{,}03^5 + 515 \,.\, 1{,}03^4 + 511 \,.\, 1{,}03^3 + 507 \,.\, 1{,}03^2 + 503 \,.\, 1{,}03)$$

$$249500 = k'_{12}\,(624{,}4893 + 601{,}6632 + 579{,}6370 + 558{,}3835 + 537{,}8763 + 518{,}0900) = 3420{,}1393 \,.\, k'_{12};$$

folglich ist

$$k'_{12} = \frac{249500}{3420{,}1393} = 72{,}95 \text{ Mk.}$$

Zweite Auflösung.

Nach der Tabelle I ist

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}_{18} = 293{,}11$$
$$\Sigma\mathfrak{P}_m = \Sigma\mathfrak{P}_{12} = 8168{,}5848294$$
$$\Sigma\mathfrak{P}_n = \Sigma\mathfrak{P}_{18} = 6159{,}6116903$$

also nach obiger Formel (5):

$$k_{12} = \frac{293{,}11 \,.\, 500}{8168{,}5848294 - 6159{,}6116903}$$
$$= \frac{146555}{2008{,}9731391} = 72{,}95 \text{ Mk.}$$

§. 41. Aufgabe.

Welche Zusatzprämie z'_m hat eine Anstalt zu nehmen, wenn ein mjähriges Kind durch eine Jahresprämie k'_m auf ein im nten Lebensjahre fälliges Kapital K unter der Bedingung versichert werden soll, daß, im Falle es vorher stirbt, sämmtliche Versicherungsprämien (ohne die Zusatzprämien) zurückzuzahlen sind, sobald das Kind das nte Jahr erreicht hätte?

Auflösung.

Von P_m im mten Lebensjahre versicherten Kindern leben zu Anfang des

1ten, 2ten, ... (n—m)ten Jahres

P_m, P_{m+1}, ... P_{n-1}

und die Anstalt erhebt von denselben an Zusatzprämien der Reihe nach:

$z'_m \,.\, P_m, \quad z'_m \,.\, P_{m+1}, \quad .... \quad z'_m \,.\, P_{n-1}.$

Der Werth der Einnahmen ist somit am Ende des (n—m)ten Jahres oder bei erreichtem nten Lebensjahre der Kinder

$$= z'_m \, (P_m \,.\, 1{,}0p^{n-m} + P_{m+1} \,.\, 1{,}0p^{n-m-1} + \dots + P_{n-1} \,.\, 1{,}0p)$$
$$= z'_m \,.\, 1{,}0p^n \left(\frac{P_m}{1{,}0p^m} + \frac{P_{m+1}}{1{,}0p^{m+1}} + \dots + \frac{P_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}} \right)$$
$$= z'_m \,.\, 1{,}0p^n \, (\mathfrak{P}_m + \mathfrak{P}_{m+1} + \dots + \mathfrak{P}_{n-1})$$
$$= z'_m \,.\, 1{,}0p^n \, (\Sigma\mathfrak{P}_m - \Sigma\mathfrak{P}_n) \dots\dots\dots (1),$$

wie sich solches auch aus §. 40 (3) unmittelbar ergibt.

Da von den P_m versicherten Kindern im

1ten, 2ten, ... (n—m)ten Jahre

der Reihe nach

$P_m - P_{m+1}, \quad P_{m+1} - P_{m+2}, \quad .... \quad P_{n-1} - P_n$

sterben und diese die Prämie nur

1, 2, ... (n—m)

mal entrichtet haben, so ist die von der Anstalt nach (n—m) Jahren zu leistende Rückvergütung

$$= k'_m (P_m - P_{m+1}) + 2k'_m (P_{m+1} - P_{m+2}) + \ldots + (n-m)\, k'_m (P_{n-1} - P_n)$$

$$= k'_m [P_m + P_{m+1} + P_{m+2} + \ldots + P_{n-1} - (n-m) P_n] \ldots (2)$$

Setzt man nun die Einnahme (1) und die Ausgabe (2) einander gleich, so erhält man die Gleichung

$$z'_m \,.\, 1{,}0p^n (\Sigma \mathfrak{P}_m - \Sigma \mathfrak{P}_n) = k'_m [P_m + P_{m+1} + \ldots + P_{n-1} - (n-m) P_n]$$

und hieraus

$$z'_m = \frac{k'_m [P_m + P_{m+1} + \ldots + P_{n-1} - (n-m) P_n]}{1{,}0p^n (\Sigma \mathfrak{P}_m - \Sigma \mathfrak{P}_n)} \ldots (3)$$

Beispiel.

Welche Zusatzprämie darf eine Aussteuerversicherungsanstalt nehmen, wenn ein Kind im 12ten Lebensjahre mit einer nach erreichtem 18ten Jahre zahlbaren Summe von 500 Mk. unter der Bedingung versichert wurde, daß, im Falle es vor erreichtem 18ten Jahre sterben sollte, zu dieser Zeit sämmtliche Versicherungsprämien zurückbezahlt werden, bei Berechnung eines 3 prozentigen Zinsfußes?

Erste Auflösung.

Bestimmt man zuerst die Jahresprämie, so findet man dafür nach dem Beispiele zu §. 40. 72,95 Mk.

Befolgen wir nun bei der Berechnung der Zusatzprämie den in obiger allgemeinen Aufgabe eingeschlagenen Weg, um zugleich diesen dadurch zu erläutern, und nehmen wir nach der Sterblichkeitstabelle an, daß sich gleichzeitig 523 zwölfjährige Kinder in der angegebenen Weise versichert haben, so zeigt das Beispiel zu §. 40, daß der Werth aller Jahresprämien zu je 72,95 Mk., welche diese Kinder bis zum erreichten 18ten Lebensalter an die Anstalt entrichteten, zu dieser Zeit

$$= 72{,}95 \,.\, 3420{,}1393 \text{ Mk.}$$

beträgt. Da hiernach durch eine Jahresprämie von 72,95 Mk. der Werth 72,95 . 3420,1393 Mk., also durch die Prämieneinheit 3420,1393 Mk. erzielt wird, so liefert die Zusatzprämie z'_{12} den Werth

$$z'_{12} \,.\, 3420{,}1393 \text{ Mk.} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Von den 523 zwölfjährigen Kindern sterben aber im

1ten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten Jahre

der Reihe nach

4, 4, 4, 4, 4, 4

Kinder und die Rückvergütung der Anstalt ist somit

$= 72{,}95 . 4 + 2 . 72{,}95 . 4 + 3 . 72{,}95 . 4 + 4 . 72{,}95 . 4$
$+ 5 . 72{,}95 . 4 + 6 . 72{,}95 . 4 = 6127{,}8$ Mk. . . . (2)

Aus (1) und (2) folgt

$$z'_{12} . 3420{,}1393 = 6127{,}8$$

und hieraus

$$z'_{12} = \frac{6127{,}8}{3420{,}1393} = 1{,}79 \text{ Mk.}$$

Zweite Auflösung.

Machen wir zur Bestimmung der Zusatzprämie Gebrauch von obiger allgemeinen Formel (3), so wird

$$z'_{12} = \frac{72{,}95\,(P_{12} + P_{13} + P_{14} + P_{15} + P_{16} + P_{17} - 6 . P_{18})}{1{,}03^{18}\,(\Sigma\mathfrak{P}_{12} - \Sigma\mathfrak{P}_{18})}$$

$$= \frac{72{,}95\,(523 + 519 + 515 + 511 + 507 + 503 - 6 . 499)}{1{,}702433\,(8168{,}5838304 - 6159{,}6106913)}$$

$$= \frac{72{,}95 . 84}{1{,}702433 . 2008{,}9731391} = 1{,}79 \text{ Mk.}$$

Bei Entrichtung einer Jahresprämie

$$= 72{,}95 + 1{,}79 = 74{,}74 \text{ Mk.}$$

kann also die Anstalt die Rückvergütung der bis zum Tode entrichteten Prämien gewähren.

§. 42. Aufgabe.

Welche Zusatzprämie hat eine Anstalt zu berechnen, wenn ein mjähriges Kind unter der Bedingung mit einer Summe K versichert wird, daß, im Falle es vor erreichtem nten Lebensjahre sterben sollte, sämmtliche Prämien beim Tode zurückgegeben werden müssen?

Auflösung.

Man berechne den künftigen Betrag, welchen die P_m mjährigen Kinder nach (n—m) Jahren der Anstalt entrichtet haben (§. 41), und bestimme dafür die entsprechende Zusatzprämie.

Zur Erläuterung diene nachstehendes

Beispiel.

Ein 12jähriges Kind wird mit einer Jahresprämie von 72,95 Mk. unter der Bedingung versichert, daß, im Fall dasselbe vor dem 18ten Lebensjahre stirbt, sämmtliche Prämien am Todestage zurückbezahlt werden müssen. Welche Zusatzprämie hat die Anstalt

zu berechnen, wenn dabei ein 3prozentiger Zinsfuß zu Grunde gelegt wird?

Auflösung.

Die Anstalt hat nach dem Beispiele des §. 41 im

1ten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten

Jahre der Reihe nach zurückzugeben:

$4.72{,}95;\ 8.72{,}95;\ 12.72{,}95;\ 16.72{,}95;\ 20.72{,}95;\ 24.72{,}95.$

Würde sie nun diese Summen sogleich bei eingetretenem Todesfalle rückvergüten, so gingen für sie die betreffenden Zinsen und Zinseszinsen verloren. Man hat demnach jeden Werth auf das 18te Jahr zu berechnen und erhält alsdann für die von der Bank zu leistenden Vergütungen die Summe

$$72{,}95\,(4\,.\,1{,}03^6 + 8\,.\,1{,}03^5 + 12\,.\,1{,}03^4 + 16\,.\,1{,}03^3 + 20\,.\,1{,}03^2 + 24\,.\,1{,}03)$$

$$= 72{,}95\,(4{,}7762088 + 9{,}2741920 + 13{,}5061056 + 17{,}4836320 + 21{,}218 + 24{,}72)$$

$$= 72{,}95\,.\,90{,}9781384 = 6636{,}84 \text{ Mk.}$$

Diese Summe ist nun durch Zusatzprämien aufzubringen.

Da nach dem Beispiele zu §. 40 der Werth sämmtlicher Prämien zu derselben Zeit $= 72{,}95\,.\,3420{,}1393$ beträgt, also eine Prämie von 1 Mk. die Summe 3420,1393 Mk. verschafft, so wird die Zusatzprämie

$$= \frac{6636{,}84}{3420{,}1393} = 1{,}94 \text{ Mk.}$$

§. 43. Aufgabe.

Welche Zusatzprämie Z'_m muß eine Anstalt nehmen, wenn sie, im Falle ein im mten Jahre versichertes Kind vor erreichtem nten Lebensjahre stirbt, a) zu dieser Zeit, b) bei dem Tode des Kindes sämmtliche Versicherungsprämien sammt Zusatzprämien zurückgeben soll?

Auflösung.

Man verfahre analog wie in §. 41 und §. 42, nur setze man in beiden Fällen $k'_m + Z'_m$ statt der Versicherungsprämie k'_m.

Beispiele.

1) Wie groß ist die Zusatzprämie Z'_m, welche eine Versicherungsanstalt für ein 12jähriges Kind zu nehmen hat, wenn sie, im Falle dasselbe vor dem 18ten Lebensjahre stirbt, zu dieser Zeit sämmtliche

Versicherungsprämien à 72,95 Mk. sammt den Zusatzprämien zurückgeben soll?

Auflösung.

Nach dem Beispiele zu §. 41 hat die Anstalt in diesem Falle $84(72,95+Z'_m)$ Mk. zurückzuzahlen und beträgt die Summe, welche die Kinder an dieselbe entrichtet haben, $(72,95+Z'_m)$ 3420,1393 Mk.

Da also, wie in den vorhergehenden Beispielen, eine Prämie von 1 Mk. die Summe 3420,1393 Mk. erwirkt, so findet man aus der Proportion

$$3420,1393 : 1 = 84(72,95 + Z'_m) : Z'_m$$

die Zusatzprämie

$$Z'_m = \frac{6127,8}{3336,1393} = 1,83 \text{ Mk.}$$

2) Welche Zusatzprämie hat die Anstalt zu berechnen, wenn in vorhergehendem Beispiele die Annahmen unverändert bleiben, die Rückerstattung aber bei dem Tode des Kindes erfolgen soll?

Auflösung.

Unter Berücksichtigung des Beispiels zu §. 42 erhält man die Proportion

$$3420,1393 : 1 = 90,9781384\,(72,95 + Z'_m) : Z'_m$$

und hieraus

$$Z'_m = \frac{6636,84}{3329,1611} = 1,993 \text{ Mk.}$$

§. 44. Aufgaben zur Uebung.

1) Welche Einlage ist für ein 6jähriges Kind in eine Versicherungsanstalt sogleich zu zahlen, wenn demselben nach vollendetem 24ten Jahre eine Summe von 2500 Mk. ausbezahlt werden soll und die Zinsen zu 3 % berechnet werden?

2) Ein Kind soll bei der Geburt mit 3000 Mk., auf sein 21tes Lebensjahr zahlbar, versichert werden. Wie groß ist die einmalige Einlage bei Berechnung 3prozentiger Zinsen?

3) Welche Einlage hat eine Anstalt für ein 8jähriges Kind zu berechnen, wenn dasselbe mit 1000 Mk., zahlbar bei vollendetem 18ten Jahre, versichert werden soll und 3 % Zinsen angesetzt werden?

4) Ein Kind wird im 11ten Lebensjahre in der Weise versichert, daß ihm nach erreichtem 18ten Jahre 400 Mk. ausbezahlt werden, im Falle es aber vorher stirbt, zu dieser Zeit die Einlage

wieder zurückerstattet werden soll. Welche Zusatzprämie darf die Anstalt in diesem Falle nehmen, wenn dem Zinsfuß 3prozentige Zinsen zu Grunde gelegt werden?

5) Ein Kind wurde bei der Geburt gegen eine einmalige Einlage in der Weise versichert, daß ihm nach vollendetem 18ten Jahre 2500 Mk. ausbezahlt werden, im Falle es aber vorher stirbt, die Einlage zu dieser Zeit zurückgegeben werden soll. Welche Zusatzprämie hat die Bank bei 3 % Zinsenansatz zu berechnen?

6) Welche Zusatzprämie hat eine Anstalt zu erheben, wenn ein Kind bei der Geburt auf 2000 Mk., nach vollendetem 21ten Jahre zahlbar, versichert wird und die Versicherungsprämie sammt der Zusatzprämie zu dieser Zeit zurückgegeben werden sollen, im Falle das Kind vorher stirbt? Den Zinsfuß zu 3 % berechnet.

7) Ein 10jähriges Kind soll gegen Entrichtung einer Jahresprämie mit 4000 Mk., zahlbar nach erreichtem 18ten Jahre, versichert werden. Wie groß ist diese Prämie, wenn 3prozentige Zinsen berechnet werden?

8) Ein Kind wurde bei der Geburt auf eine Summe, zahlbar bei erreichtem 18ten Lebensjahre, gegen eine zu leistende Jahresprämie von 10 Mk. in der Weise versichert, daß wenn es vorher sterben sollte, die Anstalt zur bezeichneten Zeit die bis zum Tode bezahlten Prämien zurückerstatten muß. Welche Zusatzprämie darf die Anstalt berechnen, wenn 4prozentige Zinsen in Anrechnung gebracht werden?

9) Ein 10jähriges Kind wurde gegen eine Jahresprämie von 20 Mk. auf das 18te Lebensjahr versichert. Welche Zusatzprämie hat die Versicherungsanstalt zu nehmen, wenn sie zu dieser Zeit sämmtliche Prämien zurückgeben muß, im Falle das Kind vorher stirbt, bei einem Ansatz 4prozentiger Zinsen?

10) Welche Zusatzprämie hat die Bank zu nehmen, wenn in der Aufgabe 8 die Angaben unverändert bleiben, die Rückgewährung aber beim Tode des Kindes geschehen soll?

11) Man soll bestimmen, welche Zusatzprämie eine Versicherungsanstalt unter den in Aufgabe 8 gemachten Voraussetzungen zu nehmen hat, wenn sie sämmtliche Jahresprämien nebst Zusatzprämien im 18ten Jahre zurückgeben soll?

12) Wie groß wird die Zusatzprämie für vorhergehende

Aufgabe sein müssen, wenn die Vergütung nach erfolgtem Ableben des Kindes geschehen soll?

B. Berechnung der Einlagen bei Kinderversorgungskassen.

§. 45. Erklärung.

Bei den Kinderversorgungskassen kann die zur festgesetzten Zeit (18tes, 21tes ꝛc. Lebensjahr) an das versorgte Kind zu entrichtende Zahlung nicht im Voraus festgesetzt werden, indem nämlich sämmtliche Kinder, welche in gleichem Alter versichert wurden, eine besondere Kasse bilden und deren Beiträge, mit Einschluß der hieraus erwachsenen Erträge, zu der festgesetzten Zeit an die noch lebenden Kinder eben dieser Kasse gleichmäßig vertheilt werden. Will ein Kind später einer schon bestehenden Kasse beitreten, so ist seine Prämie natürlich so zu berechnen, daß es mit den früher beigetretenen gleiche Ansprüche auf die betreffende Kasse hat.

§. 46. Aufgabe.

Von P_0 neugebornen und gleichzeitig einer Kasse beigetretenen Kindern zahlt jedes eine jährliche Prämie von r_0 an eine Versorgungskasse; man soll bestimmen, welche Prämie ein ein-, zwei-, drei- ... (n—1)jähriges Kind an diese Kasse zu entrichten hat, um bei vollendetem nten Lebensjahre gleiche Ansprüche an die Kasse zu haben, wie die von jenen Neugebornen noch Lebenden.

Auflösung.

Die jährlichen Prämien betragen der Reihe nach

$$P_0 r_0,\ P_1 r_0,\ P_2 r_0,\ \ldots\ P_{n-1} r_0$$

und zur Vertheilung kommt somit nach n Jahren die Summe

$$r_0 (P_0 \cdot 1{,}0p^n + P_1 \cdot 1{,}0p^{n-1} + P_2 \cdot 1{,}0p^{n-2} + \ldots + P_{n-1} \cdot 1{,}0p)$$

$$= r_0 \cdot 1{,}0p^n \left(P_0 + \frac{P_1}{1{,}0p} + \frac{P_2}{1{,}0p^2} + \frac{P_3}{1{,}0p^3} + \ldots + \frac{P_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}}\right)$$

$$= r_0 \cdot 1{,}0p^n (\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 + \ldots + \mathfrak{P}_{n-1})$$

$$= r_0 \cdot 1{,}0p^n (\Sigma\mathfrak{P}_0 - \Sigma\mathfrak{P}_n) \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Von den P_0 Kindern leben aber nach erreichtem nten Jahre nur noch P_n, und der Antheil eines jeden Kindes ist demnach

$$= \frac{r_0 . 1{,}0p^n}{P_n} (\Sigma \mathfrak{P}_0 - \Sigma \mathfrak{P}_n)$$
$$= \frac{r_0 (\Sigma \mathfrak{P}_0 - \Sigma \mathfrak{P}_n)}{\mathfrak{P}_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Nehmen wir nun ferner an, daß zu Anfang des zweiten Jahres derselben Kasse P_1 einjährige Kinder beitreten und daß dieselben eine jährliche Prämie r_1 entrichten, so erhalten wir auf analoge Weise für die nach (n—1) Jahren zur Auszahlung kommende Summe

$$r_1 (P_1 . 1{,}0p^{n-1} + P_2 . 1{,}0p^{n-2} + P_3 . 1{,}0p^{n-3} + \ldots + P_{n-1} . 1{,}0p)$$
$$= r_1 . 1{,}0p^n \left(\frac{P_1}{1{,}0p} + \frac{P_2}{1{,}0p^2} + \frac{P_3}{1{,}0p^3} + \ldots\ldots + \frac{P_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}}\right)$$
$$= r_1 . 1{,}0p^n (\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 + \ldots . + \mathfrak{P}_{n-1})$$
$$= r_1 . 1{,}0p^n (\Sigma \mathfrak{P}_1 - \Sigma \mathfrak{P}_n)$$

und da nach (n — 1) Jahren nur noch P_n von den damals einjährigen Kindern leben, so ist der Antheil eines jeden

$$= \frac{r_1 . 1{,}0p^n}{P_n} (\Sigma \mathfrak{P}_1 - \Sigma \mathfrak{P}_n)$$
$$= \frac{r_1 (\Sigma \mathfrak{P}_1 - \Sigma \mathfrak{P}_n)}{\mathfrak{P}_n} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Sollen nun beim Sturze der Kasse die Kinder, welche im Alter von einem Jahre der Kasse der Neugebornen beigetreten sind, mit diesen gleiche Ansprüche haben, so müssen die beiden Ausdrücke (1) und (2) einander gleich sein und man erhält:

$$r_0 (\Sigma \mathfrak{P}_0 - \Sigma \mathfrak{P}_n) = r_1 (\Sigma \mathfrak{P}_1 - \Sigma \mathfrak{P}_n)$$

und hieraus:

$$r_1 = \frac{r_0 (\Sigma \mathfrak{P}_0 - \Sigma \mathfrak{P}_n)}{\Sigma \mathfrak{P}_1 - \Sigma \mathfrak{P}_n} .$$

Durch eine ähnliche Betrachtung findet man für die Prämie r_2 der zweijährigen Kinder, welche der Kasse der Neugebornen beizutreten wünschen:

$$r_2 = \frac{r_0 (\Sigma \mathfrak{P}_0 - \Sigma \mathfrak{P}_n)}{\Sigma \mathfrak{P}_2 - \Sigma \mathfrak{P}_n}$$

und ebenso:

$$r_3 = \frac{r_0 (\Sigma \mathfrak{P}_0 - \Sigma \mathfrak{P}_n)}{\Sigma \mathfrak{P}_3 - \Sigma \mathfrak{P}_n}$$
$$r_4 = \frac{r_0 (\Sigma \mathfrak{P}_0 - \Sigma \mathfrak{P}_n)}{\Sigma \mathfrak{P}_4 - \Sigma \mathfrak{P}_n} \quad \text{u. s. w.}$$

Beispiel.

Welche jährliche Prämie hat ein 10jähriges Kind an eine Versorgungskasse zu entrichten, wenn es an einer von Neugeborenen mit einer Jahresprämie von 12 Mk. gegründeten Kasse gleichen Antheil nehmen will, die Anstalt 3procentige Zinsen berechnet und die Kasse bei erreichtem 20ten Lebensjahre gestürzt wird?

Auflösung.

Nach der obigen allgemeinen Entwickelung wird

$$r_{10} = \frac{12\,(\Sigma\mathfrak{P}_0 - \Sigma\mathfrak{P}_{20})}{\Sigma\mathfrak{P}_9 - \Sigma\mathfrak{P}_{20}}$$

oder

$$r_{10} = \frac{12\,(14660{,}089 - 5584{,}208)}{9358{,}257 - 5584{,}208}$$

$$= \frac{12 \,.\, 9075{,}881}{3774{,}049} = 28{,}857 \text{ Mk.}$$

Zusätze.

1) Gegen eine Zusatzprämie gewährt auch in vorliegendem Falle, wenn das Kind vor der festgesetzten Zeit sterben sollte, die Anstalt die Rückvergütung sämmtlicher Versicherungsprämien ohne Zinsen.

Bezeichnet z_0 die Zusatzprämie, r_0 die jährliche Versicherungsprämie für ein neugeborenes Kind, so ist der Werth der Beiträge sämmtlicher Kinder nach (α)

$$= (r_0 + z_0)\,1{,}0p^n(\Sigma\mathfrak{P}_0 - \Sigma\mathfrak{P}_n).$$

Nun zahlen aber die im

1ten, 2ten, 3ten, ... nten Jahre

sterbenden Kinder nur

1, 2, 3, ... nmal

die betreffende Prämie, also hat die Anstalt zurückzugeben:

$$r_0\,[(P_0 - P_1) + 2(P_1 - P_2) + \ldots . + n(P_{n-1} - P_n)]$$
$$= r_0\,(P_0 + P_1 + P_2 + \ldots . + P_{n-1} - nP_n) \ldots . (\beta)$$

und der Kasse verbleibt noch:

$$(r_0 + z_0)\,1{,}0p^n(\Sigma\mathfrak{P}_0 - \Sigma\mathfrak{P}_n) - r_0(P_0 + P_1 + P_2 + \ldots . + P_{n-1} - nP_n).$$

Da dieser Werth gleich dem Werthe aller Versicherungs-

prämien sein muß und jedem Kinde derselbe Antheil ungeschmälert verbleiben soll, so erhält man die Gleichung:

$$(r_0 + z_0)\,1{,}0p^n(\Sigma\mathfrak{P}_0 - \Sigma\mathfrak{P}_n) - r_0(P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} - nP_n) = r_0\,1{,}0p^n(\Sigma\mathfrak{P}_0 - \Sigma\mathfrak{P}_n) \ldots (\gamma),$$

woraus folgt:

$$z_0 = \frac{r_0(P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} - nP_n)}{1{,}0p^n(\Sigma\mathfrak{P}_0 - \Sigma\mathfrak{P}_n)}.$$

Analog erhält man für die dieser Kasse beitretenden 1, 2, 3, ... jährigen Kinder:

$$z_1 = \frac{r_1(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_{n-1} - (n-1)P_n)}{1{,}0p^n(\Sigma\mathfrak{P}_1 - \Sigma\mathfrak{P}_n)},$$

$$z_2 = \frac{r_2(P_2 + P_3 + P_4 + \ldots + P_{n-1} - (n-2)P_n)}{1{,}0p^n(\Sigma\mathfrak{P}_2 - \Sigma\mathfrak{P}_n)}$$

u. s. w.

Sollen die Versicherungsprämien sammt Zusatzprämien zurückgegeben werden, so hat man in (β) $(r_0 + z_0)$ statt r_0 zu setzen und erhält nach (γ) die Gleichung

$$(r_0 + z_0)1{,}0p^n(\Sigma\mathfrak{P}_0 - \Sigma\mathfrak{P}_n) - (r_0 + z_0)(P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} - nP_n) = r_0\,.\,1{,}0p^n(\Sigma\mathfrak{P}_0 - \Sigma\mathfrak{P}_n)$$

folglich für

$$r_0 + z_0 = \frac{r_0\,.\,1{,}0p^n(\Sigma\mathfrak{P}_0 - \Sigma\mathfrak{P}_n)}{1{,}0p^n(\Sigma\mathfrak{P}_0 - \Sigma\mathfrak{P}_n) - (P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} - nP_n)}.$$

Also wird

$$z_0 = r_0\left[\frac{1{,}0p^n(\Sigma\mathfrak{P}_0 - \Sigma\mathfrak{P}_n)}{1{,}0p^n(\Sigma\mathfrak{P}_0 - \Sigma\mathfrak{P}_n) - (P_0 + P_1 + P_2 + \ldots P_{n-1} - nP_n)} - 1\right]$$

2) Soll ein Kind bei der Geburt gegen eine **einmalige** Zahlung k_0 in der Klasse der Neugebornen versichert werden, so muß der Werth

$$\frac{P_0\,.\,k_0\,.\,1{,}0p^n}{P_n} = \frac{P_0\,.\,k_0}{\mathfrak{P}_n},$$

zu welchem diese Zahlung nach n Jahren anwächst, gleich dem in (1) gefundenen Werthe sein, und man hat daher

$$\frac{P_0\,.\,k_0}{\mathfrak{P}_n} = r_0\,\frac{(\Sigma\mathfrak{P}_0 - \Sigma\mathfrak{P}_n)}{\mathfrak{P}_n}$$

und findet hieraus:

$$k_0 = \frac{r_0(\Sigma\mathfrak{P}_0 - \Sigma\mathfrak{P}_n)}{\mathfrak{P}_0}$$

u. s. w.

C. Berechnung der Leibrenten.

§. 47. Erklärungen.

1) Eine Rente, welche von einer gewissen Person lebenslänglich bezogen wird, heißt eine Leibrente.

2) Beginnt deren Bezug erst nach Verlauf einer bestimmten Anzahl von Jahren, im Falle derjenige noch lebt, welcher die Mise bezahlt hat, so nennt man eine solche Rente eine aufgeschobene Leibrente.

3) Wird eine Rente nur auf eine bestimmte Anzahl von Jahren ausbezahlt — vorausgesetzt, daß der die Rente Beziehende so lange am Leben ist — so wird diese Rente eine temporäre Leibrente genannt.

4) Läßt ein Rentner während einer Reihe von Jahren seine Rente bei der Leibrentenkasse stehen, so heißt diese Rente eine aufgesparte. Nach Verlauf der bestimmten Zeit kann derselbe dann die Beiträge zusammen erheben oder zum Kapitale schlagen, um seine Leibrente zu erhöhen.

5) Hängt eine Leibrente von dem Leben mehrer bei der Anstalt betheiligten Personen ab, so heißt sie eine Verbindungsrente. Wird dieselbe so lange ausbezahlt, als diese bestimmten Personen zusammen leben, also als keine von ihnen gestorben ist, so erhält man eine Verbindungsrente auf das kürzeste Leben; wird die Rente aber bis zum gänzlichen Aussterben aller Betheiligten ausbezahlt, so hat man eine Verbindungsrente auf das längste Leben.

6) Wird eine Rente nur dann an bestimmte Personen ausbezahlt, wenn eine oder mehre im Voraus bestimmte Personen gestorben sind, so heißt dieselbe eine Ueberlebungsrente oder Anwartschaft. Dieselben finden besonders bei der Berechnung von Wittwen- und Waisenpensionen Anwendung.

7) Anstalten, welche Verträge gegen Leibrentenzahlungen abschließen, heißen Leibrentenanstalten. Nachstehend sollen nun die verschiedenen, bei Berechnung der Leibrenten vorkommenden Fälle an einigen Aufgaben näher erläutert werden.



a) Leibrenten für eine Person.

I) Sogleich beginnende Leibrente.

§. 48. Aufgabe.

Welche Kapitaleinlage (Mise) R_m hat eine mjährige Person in eine Rentenanstalt zu machen, um sich eine unveränderliche am Ende eines jeden Jahres fällige (nachschüssige) Leibrente r zu erwerben, wenn der Zinsfuß zu p % berechnet wird?

Auflösung.

Bezeichnen wir wieder die Anzahl der im

mten, (m + 1)ten, (m + 2)ten, ...

Alter lebenden Personen der Reihe nach durch

P_m P_{m+1} P_{m+2} ....

so hat die Rentenanstalt am Ende des

1ten, 2ten, 3ten, ...

Jahres zu zahlen:

$P_{m+1}.r,$ $P_{m+2}.r,$ $P_{m+3}.r,$ ....

und der baare Werth aller Zahlungen ist somit

$$= \frac{P_{m+1}}{1{,}0p}.r + \frac{P_{m+2}}{1{,}0p^2}.r + \frac{P_{m+3}}{1{,}0p^3}.r + \ldots.$$

$$= r\left(\frac{P_{m+1}}{1{,}0p} + \frac{P_{m+2}}{1{,}0p^2} + \frac{P_{m+3}}{1{,}0p^3} + \ldots\ldots\right)$$

$$= r.1{,}0p^m\left(\frac{P_{m+1}}{1{,}0p^{m+1}} + \frac{P_{m+2}}{1{,}0p^{m+2}} + \frac{P_{m+3}}{1{,}0p^{m+3}} + \ldots.\right)$$

$$= r.1{,}0p^m\,(\mathfrak{P}_{m+1} + \mathfrak{P}_{m+2} + \mathfrak{P}_{m+3} + \ldots.)$$

$$= r.1{,}0p^m\,.\Sigma\mathfrak{P}_{m+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Die Bank erhebt dagegen von den P_m zu Anfang lebenden Personen die Summe

$$P_m\,.\,R_m \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Da diese aber gleich dem baaren Werthe aller Auszahlungen sein muß, so erhält man durch Gleichsetzung der Ausdrücke (1) und (2) die Gleichung

$$P_m\,.\,R_m = r.1{,}0p^m\,.\,\Sigma\mathfrak{P}_{m+1}$$

und hieraus den baaren Werth der Leibrente

$$R_m = \frac{r.1{,}0p^m}{P_m}\,.\,\Sigma\mathfrak{P}_{m+1},$$

oder $$R_m = \frac{r \cdot \Sigma \mathfrak{P}_{m+1}}{\mathfrak{P}_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Anmerkungen. 1) Da wieder das Verhältniß $\frac{\Sigma \mathfrak{P}_{m+1}}{\mathfrak{P}_m}$ unabhängig ist von der Anzahl der in einem gewissen Alter Lebenden, so ist es auch hier bei der Berechnung gleichgiltig, wie viel Personen in einem bestimmten Alter der Anstalt beigetreten sind und wir können also für P_m stets die in der Sterblichkeitstabelle angegebene Anzahl von Lebenden einführen.

2) Ueber die zweckmäßigste Art die Werthe von $\Sigma \mathfrak{P}_m$ zu berechnen, vergl. die Anmerkung zu §. 40.

Zusätze.

1) Für den Fall, daß die Rente praenumerando bezahlt wird, diese also eine vorschüssige ist, bleibt die Entwickelung ganz dieselbe, nur beginnt alsdann die Summe, welche dem Ausdrucke (1) zu Grunde liegt, mit $\mathfrak{P}_m$.

Bezeichnet man unter dieser Voraussetzung den baaren Werth durch $'R_m$, so wird also

$$'R_m = R_m + r = \frac{r \cdot \Sigma \mathfrak{P}_m}{\mathfrak{P}_m} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

2) Ersetzen wir hier und in der Folge für den Fall, daß die Rente $= 1$ ist, den Buchstaben R durch ϱ, so folgt aus (3) und (4)

$$\varrho_m = \frac{\Sigma \mathfrak{P}_{m+1}}{\mathfrak{P}_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$'\varrho_m = \varrho_{m+1} = \frac{\Sigma \mathfrak{P}_m}{\mathfrak{P}_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Anmerkung. Die Rentenanstalten besitzen Tabellen, aus welchen man den baaren Werth einer Leibrente für $r = 1$, also die Werthe von ϱ_m und $'\varrho_m$ unmittelbar ersehen kann.

3) Manche Rentenanstalten gewähren gegen eine besondere Einlage die Rückzahlung des Ueberschusses der baaren Einlage über die schon bezogene Rente an die Erben, im Falle der Rentenbezieher stirbt, während noch ein solcher Ueberschuß vorhanden ist. Diese besondere Einlage E_m läßt sich leicht berechnen.

Denn hat sich eine mjährige Person durch die baare Einlage R_m auf eine nachschüssige Leibrente r versichert, so werden, unter obiger Voraussetzung, die Erben während so vieler Jahre μ eine Vergütung anzusprechen haben, bis man hat:

$$R_m - \mu r = 0$$

oder
$$\mu = \frac{R_m}{r}.$$

Nun sterben aber im

1ten 2ten 3ten .... μten Jahre

der Reihe nach

$P_m - P_{m+1},\ P_{m+1} - P_{m+2},\ P_{m+2} - P_{m+3},\ \ldots\ P_{m+\mu-1} - P_{m+\mu}$

Personen, und die Anstalt hat also, wenn man das Absterben jeweils an das Ende des Jahres versetzt, am Ende des

1ten, 2ten, ... μten

Jahres der Reihe nach zu vergüten:

$$(P_m - P_{m+1}) R_m,\ (P_{m+1} - P_{m+2})(R_m - r),\ \ldots$$
$$(P_{m+\mu-1} - P_{m+\mu})(R_m - (\mu - 1) r)$$

oder baar die Summe

$$\frac{(P_m - P_{m+1}) R_m}{1{,}0p} + \frac{(P_{m+1} - P_{m+2})(R_m - r)}{1{,}0p^2} + \ldots$$
$$+ \frac{(P_{m+\mu-1} - P_{m+\mu})(R_m - (\mu - 1) r)}{1{,}0p^\mu}.$$

Sie erhebt dagegen die Summe

$$P_m \cdot E_m$$

und es läßt sich nun durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke der Werth von E_m ermitteln.

Die Gesammteinlage ist alsdann $R_m + E_m$.

Anmerkung. In ganz analoger Weise hat man zu verfahren, wenn die Leibrente eine vorschüssige ist.

Beispiel.

Welche Kapitaleinlage hat eine 84jährige Person zu leisten, wenn sich dieselbe eine Leibrente von 1200 Mk. erwerben will, und dem Zinsfuße 4 % zu Grunde gelegt werden?

Auflösung.

Nach der am Ende des Buches befindlichen Tabelle I ist

$$\mathfrak{P}_m = \mathfrak{P}_{84} = 0{,}7417077$$
$$\Sigma\mathfrak{P}_{m+1} = \Sigma\mathfrak{P}_{85} = 2{,}6202336,$$

folglich nach obiger Gleichung (3):

$$R_{84} = \frac{1200 \,.\, 2{,}6202336}{0{,}7417077} = 4239{,}2 \text{ Mk.}$$

Anmerkung. Ist die Leibrente eine vorschüssige, so folgt nach Gleichung (4):

$${}'R_{84} = \frac{1200 \,.\, \Sigma\mathfrak{P}_{84}}{\mathfrak{P}_{84}} = \frac{1200 \,.\, 3{,}3619413}{0{,}7417077}$$
$$= 5439{,}2 \text{ Mk.} = 1200 + R_{84}.$$

2) Aufgeschobene Leibrente.

§. 49. Aufgabe.

Man soll die Mise ${}_aR_m$ einer um a Jahre aufgeschobenen nachschüssigen, also nach (a+1) Jahren zum ersten Male fälligen Leibrente r für eine mjährige Person bestimmen.

Auflösung.

Die Versicherungsanstalt hat am Ende des

(a+1)ten, (a+2)ten, (a+3)ten, ...

Jahres auszuzahlen:

$P_{m+a+1}.r$, $P_{m+a+2}.r$, $P_{m+a+3}.r$, ...

Der baare Werth der Ausgaben ist demnach

$$= r\left(\frac{P_{m+a+1}}{1{,}0p^{a+1}} + \frac{P_{m+a+2}}{1{,}0p^{a+2}} + \frac{P_{m+a+3}}{1{,}0p^{a+3}} + \ldots\right)$$

$$= r.1{,}0p^m\left(\frac{P_{m+a+1}}{1{,}0p^{m+a+1}} + \frac{P_{m+a+2}}{1{,}0p^{m+a+2}} + \frac{P_{m+a+3}}{1{,}0p^{m+a+3}} + \ldots\right)$$

$$= r.1{,}0p^m(\mathfrak{p}_{m+a+1} + \mathfrak{p}_{m+a+2} + \mathfrak{p}_{m+a+3} + \ldots)$$

$$= r.1{,}0p^m.\Sigma\mathfrak{p}_{m+a+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Baarzahlung der P_m Personen an die Bank ist aber

$$= P_m.{}_aR_m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und man erhält somit durch Gleichsetzung der Ausdrücke (1) und (2) die Gleichung

$$P_m.{}_aR_m = r.1{,}0p^m.\Sigma\mathfrak{p}_{m+a+1}$$

und hieraus für den Baarwerth der aufgeschobenen Leibrente

$${}_aR_m = \frac{r.1{,}0p^m.\Sigma\mathfrak{p}_{m+a+1}}{P_m},$$

oder

$${}_aR_m = \frac{r.\Sigma\mathfrak{p}_{m+a+1}}{\mathfrak{p}_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Zusätze.

1) Für eine vorschüssige um a Jahre aufgeschobene, also nach a Jahren zum ersten Male fällige Leibrente findet man auf gleiche Weise:

$${}_a'R_m = \frac{r.\Sigma\mathfrak{p}_{m+a}}{\mathfrak{p}_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

2) Für $r = 1$ folgt aus (3) und (4)

$$_a\varrho_m = \frac{\Sigma \mathfrak{p}_{m+a+1}}{\mathfrak{p}_m} \quad \dots\dots\dots\dots (5)$$

$$_a'\varrho_m = \frac{\Sigma \mathfrak{p}_{m+a}}{\mathfrak{p}_m} \quad \dots\dots\dots\dots (6)$$

3) Setzt man in den Gleichungen (3) und (4)

$$\frac{r}{\mathfrak{p}_m} = \frac{r \cdot \mathfrak{p}_{m+a}}{\mathfrak{p}_m \cdot \mathfrak{p}_{m+a}},$$

so gehen dieselben bezüglich über in

$$_aR_m = \frac{r \cdot \Sigma \mathfrak{p}_{m+a+1}}{\mathfrak{p}_{m+a}} \cdot \frac{\mathfrak{p}_{m+a}}{\mathfrak{p}_m}$$

und

$$_a'R_m = \frac{r \cdot \Sigma \mathfrak{p}_{m+a}}{\mathfrak{p}_{m+a}} \cdot \frac{\mathfrak{p}_{m+a}}{\mathfrak{p}_m},$$

oder nach §. 48 (3) und (4) in

$$_aR_m = R_{m+a} \cdot \frac{\mathfrak{p}_{m+a}}{\mathfrak{p}_m} \quad \dots\dots\dots (7)$$

und

$$_a'R_m = 'R_{m+a} \; \frac{\mathfrak{p}_{m+a}}{\mathfrak{p}_m} \quad \dots\dots\dots (8)$$

d. h. der baare Werth der Mise einer um a Jahre aufgeschobenen Leibrente für eine mjährige Person wird erhalten, wenn man den gegenwärtigen Werth der zu beziehenden Leibrente für eine (m+a)jährige Person mit dem Quotienten $\frac{\mathfrak{p}_{m+a}}{\mathfrak{p}_m}$ multiplicirt.

4) Stirbt der Rentenbezieher vor Bezug der ersten Rente, so zahlen manche Anstalten die eingezahlte Summe gegen eine besondere Einlage zurück, welche sich nach Früherem leicht berechnen läßt.

Beispiel.

Welches ist der baare Werth einer 6 Jahre lang aufgeschobenen nachschüssigen Leibrente von 1200 Mk. für eine 78jährige Person und einen Zinsfuß von 4 %?

Auflösung.

Wie wir aus dem Beispiele zu §. 48 ersehen, ist unter der gemachten Voraussetzung für eine (78 + 6) = 84jährige Person der baare Werth einer Leibrente

$$R_{m+a} = R_{84} = 4239{,}24 \text{ Mk.}$$

Demnach wird nach (7) der verlangte Werth

$$_6R_{84} = 4239{,}24 \,.\, \frac{\mathfrak{p}_{84}}{\mathfrak{p}_{78}} = \frac{4239{,}24 \,.\, 0{,}7417077}{2{,}2993164} = 1367{,}48 \text{ Mk.}$$

Anmerkung. Ist die Leibrente eine vorschüssige, so folgt nach der Anmerkung zu dem Beispiele des §. 48 aus obiger Gleichung (8)

$$_6R_{84} = \frac{5439{,}29 \,.\, 0{,}7417077}{2{,}2993164} = 1754{,}58 \text{ Mk.}$$

Zu denselben Resultaten gelangt man durch Anwendung der Gleichungen (3) und (4).

3) Temporäre Leibrente.

§. 50. Aufgabe.

Eine mjährige Person will sich eine temporäre nachschüssige Leibrente r auf t Jahre erwerben, wie groß ist die baare Einlage $_{(t)}R_m$ derselben?

Auflösung.

Die verlangte Mise wird gefunden, wenn man von der Mise der bis zum Ableben zu beziehenden nachschüssigen Leibrente die Mise einer um t Jahre aufgeschobenen nachschüssigen Leibrente subtrahirt.

Man erhält somit nach §. 48 (5) und §. 49 (5) die verlangte Baareinlage

$$_{(t)}R_m = r\,(\varrho_m - \;_t\varrho_m)$$

oder, wenn man aus §. 48 (3) und §. 49 (3) die betreffenden Werthe einführt:

$$_{(t)}R_m = \frac{r(\Sigma\mathfrak{p}_{m+1} - \Sigma\mathfrak{p}_{m+t+1})}{\mathfrak{p}_m} \;\ldots\ldots\ldots (1)$$

Zusätze.

1) Für eine vorschüssige Leibrente wird in diesem Falle der Baarwerth

$$_{(t)}R_m = \frac{r(\Sigma\mathfrak{p}_m - \Sigma\mathfrak{p}_{m+t})}{\mathfrak{p}_m} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

2) Für r = 1 folgt aus (1) und (2):

$$_{(t)}\varrho_m = \frac{\Sigma\mathfrak{p}_{m+1} - \Sigma\mathfrak{p}_{m+t+1}}{\mathfrak{p}_m} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$_{(t)}{'}\varrho_m = \frac{\Sigma\mathfrak{p}_m - \Sigma\mathfrak{p}_{m+t}}{\mathfrak{p}_m} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

3) Beginnt der Rentenbezug erst nach a Jahren und währt derselbe nur t Jahre, im Falle der Rentenbezieher so lange lebt, ist die Leibrente also eine aufgeschobene temporäre, so ist deren baarer Werth gleich der Differenz des baaren Werthes einer um a Jahre weniger dem einer um (a + t) Jahre aufgeschobenen Leibrente, also nach §. 49. für eine nachschüssige Rente

$$= r({}_{a}\varrho_m - {}_{a+t}\varrho_m)$$

$$= \frac{r(\Sigma \mathfrak{p}_{m+a+1} - \Sigma \mathfrak{p}_{m+a+t+1})}{\mathfrak{p}_m} \quad \ldots. (5)$$

und für eine vorschüssige Rente

$$= \frac{r(\Sigma \mathfrak{p}_{m+a} - \Sigma \mathfrak{p}_{m+a+t})}{\mathfrak{p}_m} \quad \ldots\ldots. (6)$$

Beispiel.

Wie groß ist der baare Werth einer während 3 Jahren zu beziehenden nachschüssigen Leibrente von 1200 Mk. für eine 84 jährige Person bei Berechnung eines 4 prozentigen Zinsfußes?

Auflösung.

Setzt man in die Gleichung (1):

$$\Sigma \mathfrak{p}_{m+1} = \Sigma \mathfrak{p}_{85} = 2{,}6202336$$

$$\Sigma \mathfrak{p}_{m+t+1} = \Sigma \mathfrak{p}_{88} = 1{,}1383795$$

$$\mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}_{84} = 0{,}7417077$$

so folgt:

$$_{(3)}R_{84} = \frac{1200(2{,}6202336 - 1{,}1383795)}{0{,}7417077} = 2397{,}5 \text{ Mk.}$$

Anmerkung. Ist die Rente praenumerando zahlbar, so folgt nach (2):

$$_{(3)}{}'R_{84} = \frac{1200(\Sigma \mathfrak{p}_{84} - \Sigma \mathfrak{p}_{87})}{\mathfrak{p}_{84}}$$

$$= \frac{1200(3{,}3619413 - 1{,}5340049)}{0{,}7417077} = 2957{,}4 \text{ Mk.}$$

4) Jährliche Einlage bei aufgeschobener Leibrente.

§. 51. Aufgabe.

Eine mjährige Person will sich von ihrem (m+a)ten Lebensjahre an eine nachschüssige Leibrente r ver-

schaffen; wie groß ist die von jetzt an am Ende eines jeden Jahres an die Rentenanstalt bis zu ihrem $(m+a)$ten Jahre zu entrichtende Einlage ${}_aR'_m$?

Auflösung.

Nach §. 49 ist die Mise der um a Jahre aufgeschobenen Leibrente für eine m jährige Person ausgedrückt durch

$$r \,.\, {}_a\rho_m \,.$$

Der baare Werth der Einnahmen der Rentenanstalt ist aber gleich der Mise einer auf a Jahre zu beziehenden temporären nachschüssigen Leibrente ${}_aR'_m$; folglich für eine jetzt m jährige Person nach §. 50. dargestellt durch

$${}_aR'_m \,.\, {}_{(a)}\rho_m .$$

Durch Gleichsetzung dieser Ausdrücke ergibt sich:

$${}_aR'_m = \frac{r \,.\, {}_a\rho_m}{{}_{(a)}\rho_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

oder, wenn man aus §. 49 (5) und §. 50 (4) die betreffenden Werthe einführt:

$${}_aR'_m = \frac{r \,.\, \Sigma\mathfrak{P}_{m+a+1}}{\Sigma\mathfrak{P}_{m+1} - \Sigma\mathfrak{P}_{m+a+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Zusätze.

1) Werden die Einlagen und Renten praenumerando in Rechnung gebracht, so wird

$${}_a'R'_m = \frac{r \,.\, \Sigma\mathfrak{P}_{m+a}}{\Sigma\mathfrak{P}_m - \Sigma\mathfrak{P}_{m+a}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

2) Für r = 1 folgt aus (3) und (4)

$${}_a\rho'_m = \frac{\Sigma\mathfrak{P}_{m+a+1}}{\Sigma\mathfrak{P}_{m+a} - \Sigma\mathfrak{P}_{m+a+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$${}_a'\rho'_m = \frac{\Sigma\mathfrak{P}_{m+a}}{\Sigma\mathfrak{P}_m - \Sigma\mathfrak{P}_{m+a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

3) Berücksichtigt man, daß nach dem Zusatz 3 des §. 49 (7) und (8) für eine nachschüssige Leibrente auch

$${}_aR_m = \frac{r \,.\, \Sigma\mathfrak{P}_{m+a+1}}{\mathfrak{P}_m} = R_{m+a} \,.\, \frac{\mathfrak{P}_{m+a}}{\mathfrak{P}_m}$$

und für eine vorschüssige

$${}_a'R_m = \frac{r \,.\, \Sigma\mathfrak{P}_{m+a}}{\mathfrak{P}_m} = {}'R_{m+a} \,.\, \frac{\mathfrak{P}_{m+a}}{\mathfrak{P}_m},$$

so gehen die Gleichungen (3) und (4) über bezüglich in

$$_{a}R'_{m} = \frac{\mathfrak{p}_{m+a}}{\Sigma\mathfrak{p}_{m+1} - \Sigma\mathfrak{p}_{m+a+1}} \cdot R_{m+a} \ldots\ldots (6)$$

$$_{a}'R'_{m} = \frac{\mathfrak{p}_{m+a}}{\Sigma\mathfrak{p}_{m} - \Sigma\mathfrak{p}_{m+a}} \cdot {}'R_{m+a} \ldots\ldots (7)$$

Diese Gleichungen drücken den baaren Werth der jährlich zu leistenden Beiträge in den Baarwerthen der betreffenden Leibrenten für eine um a Jahre ältere Person aus.

Anmerkung. Stirbt der Rentenbezieher vor dem Bezug der ersten Rente, so zahlt auch hier die Anstalt die schon eingezahlten Prämien gegen eine besondere Einlage zurück, welche sich leicht auf ähnliche Weise wie früher bestimmen läßt.

Beispiel.

Eine 81 jährige Person will sich von ihrem 84 ten Lebensjahre an eine nachschüssige Leibrente von 1200 Mk. verschaffen. Wie viel hat dieselbe von jetzt an am Ende eines jeden Jahres an die Rentenanstalt zu entrichten, wenn diese einen vierprozentigen Zinsfuß in Rechnung bringt?

Auflösung.

Setzt man nach dem Beispiele zu §. 48. in obiger Gleichung (6)

$$R_{m+a} = R_{84} = 4239{,}24 \text{ Mk.};$$

ferner nach Tabelle II:

$$\mathfrak{p}_{m+a} = \mathfrak{p}_{84} = 0{,}7417077$$
$$\Sigma\mathfrak{p}_{m+1} = \Sigma\mathfrak{p}_{82} = 5{,}4107157$$
$$\Sigma\mathfrak{p}_{m+a+1} = \Sigma\mathfrak{p}_{85} = 2{,}6202336,$$

so folgt

$$_{3}R'_{81} = \frac{0{,}7417077 \,.\, 4239{,}24}{5{,}4107157 - 2{,}6202336} = 1126{,}7 \text{ Mk.}$$

Anmerkung. Ist die Rente eine vorschüssige, so wird nach Gleichung (8)

$$_{3}'R'_{81} = \frac{\mathfrak{p}_{84} . 5439{,}29}{\Sigma\mathfrak{p}_{81} - \Sigma\mathfrak{p}_{84}} = \frac{0{,}7417077 \,.\, 5439{,}29}{6{,}7456279 - 3{,}3619413} = 1192{,}2 \text{ Mk}$$

b) Verbindungsrenten auf das kürzeste Leben.

1) Sogleich beginnende Verbindungsrente.

§. 52. Aufgabe.

Zwei Personen, von welchen die eine m, die andere n Jahre alt ist, beziehen eine nachschüssige Verbindungsrente r auf das kürzeste Leben; wie groß ist der baare Werth $^{k}R_{m,n}$ derselben?

Auflösung.

Nehmen wir an, daß gleichzeitig $P_m . P_n$ Paare einen solchen Vertrag abschließen und betrachten wir der Kürze halber dieselben als Ehepaare, die mjährigen Personen als die Männer, die njährigen als die Frauen, so sterben im ersten Jahre von P_m Männern $(P_m - P_{m+1})$ und von P_n Frauen $(P_n - P_{n+1})$, also von $P_m . P_n$ Paaren

$$(P_m - P_{m+1}) P_n \text{ Männer}$$

und

$$P_m (P_n - P_{n+1}) \text{ Frauen.}$$

Im Ganzen sterben daher im ersten Jahre

$$(P_m - P_{m+1}) P_n + P_m (P_n - P_{n+1})$$

Personen, wodurch eben so viele Ehen aufgelöst werden.

Da nun aber sowohl von den $(P_m - P_{m+1}) P_n$ Wittwen, als auch von den $P_m (P_n - P_{n+1})$ Wittwern

$$(P_m - P_{m+1}) (P_n - P_{n+1}),$$

also von den aufgelösten Ehen überhaupt noch

$$(P_m - P_{m+1}) (P_n - P_{n+1})$$

Paare sterben, so ist die Anzahl der aufgelösten Ehen nur

$$(P_m - P_{m+1}) P_n + P_m (P_n - P_{n+1}) - (P_m - P_{m+1})(P_n - P_{n+1})$$
$$= P_m . P_n - P_{m+1} . P_{n+1}.$$

Für die Anzahl der nach dem ersten Jahre noch vollständigen Paare erhält man somit

$$P_m . P_n - (P_m . P_n - P_{m+1} . P_{n+1}) = P_{m+1} . P_{n+1}.$$

Eine ganz analoge Entwickelung führt zu dem Schlusse, daß am Ende des zweiten Jahres noch

$$P_{m+2} . P_{n+2},$$

am Ende des dritten Jahres noch

$$P_{m+3} . P_{n+3} \text{ u. s. w.}$$

vollständige Paare am Leben sind.

Den am Ende des

1ten, 2ten, 3ten ....

Jahres lebenden vollständigen Paaren hat aber die Anstalt der Reihe nach auszuzahlen:

$$P_{m+1} . P_{n+1} . r, \; P_{m+2} . P_{n+2} . r, \; P_{m+3} . P_{n+3} . r, \; ....$$

Der baare Werth dieser Ausgaben ist somit

$$= r \left(\frac{P_{m+1} . P_{n+1}}{1{,}0p} + \frac{P_{m+2} . P_{n+2}}{1{,}0p^2} + \frac{P_{m+3} . P_{n+3}}{1{,}0p^3} + \dots \right)$$

$$= r \,.\, 1{,}0p^m \left(\frac{P_{m+1} \,.\, P_{n+1}}{1{,}0p^{m+1}} + \frac{P_{m+2} \,.\, P_{n+2}}{1{,}0p^{m+2}} + \ldots \right)$$

$$= r \,.\, 1{,}0p^m \left(\mathfrak{P}_{m+1} \,.\, P_{n+1} + \mathfrak{P}_{m+2} \,.\, P_{n+2} + \ldots \right)$$

oder wenn man der Kürze halber die Summe

$$\mathfrak{P}_{m+1} \,.\, P_{n+1} + \mathfrak{P}_{m+2} \,.\, P_{n+2} + \mathfrak{P}_{m+3} \,.\, P_{n+3} + \ldots = \Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} \,.\, P_{n+1})$$

setzt:

$$= r \,.\, 1{,}0p^m \,.\, \Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} \,.\, P_{n+1}) \ldots\ldots\ldots (1).$$

Die Versicherungsanstalt erhebt dagegen die Summe

$$P_m \,.\, P_n \,.\, {}^kR_{m,n} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

und man erhält demnach, wenn man diese Einnahme (2) den Ausgaben (1) gleichsetzt, die Gleichung

$$P_m \,.\, P_n \,.\, {}^kR_{m,n} = r \,.\, 1{,}0p^m \,.\, \Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} \,.\, P_{n+1})$$

und hieraus den verlangten Baarwerth

$${}^kR_{m,n} = \frac{r \,.\, 1{,}0p^m}{P_m \,.\, P_n} \,.\, \Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} \,.\, P_{n+1})$$

oder

$${}^kR_{m,n} = \frac{r \,.\, \Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} \,.\, P_{n+1})}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_n} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Zusätze.

1) Für den Fall, daß die Verbindungsrente praenumerando fällig ist, geht die Gleichung (3) über in

$${}^{k'}R_{m,n} = {}^kR_{m,n} + r = \frac{r \,.\, \Sigma(\mathfrak{P}_m \,.\, P_n)}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_n} \ldots\ldots (4).$$

2) Aus (3) und (4) folgt unmittelbar für $r = 1$:

$${}^k\varrho_{m,n} = \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} \,.\, P_{n+1})}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$${}^{k'}\varrho_{m,n} = {}^k\varrho_{m,n} + 1 = \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_m \,.\, P_n)}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_n} \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

3) Um den Gleichungen (3) und (4) noch andere, zur praktischen Anwendung zweckmäßigere Formen zu geben, seien bezüglich

$${}^kR_{m+1,\, n+1} \text{ und } {}^{k'}R_{m+1,\, n+1}$$

die baaren Werthe der nach- und vorschüssigen Verbindungsrente für dieselben Personen, wenn diese um ein Jahr älter wären; dann ist

$${}^kR_{m+1,\, n+1} = \frac{r}{\mathfrak{P}_{m+1} \,.\, P_{n+1}} \,.\, \Sigma(\mathfrak{P}_{m+2} \,.\, P_{n+2}),$$

$${}^{k'}R_{m+1,\, n+1} = \frac{r}{\mathfrak{P}_{m+1} \,.\, P_{n+1}} \,\Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} \,.\, P_{n+1});$$

oder

$$^{k}R_{m+1,n+1} = \frac{r}{\mathfrak{p}_{m+1} \cdot P_{n+1}}[-\mathfrak{p}_{m+1} \cdot P_{n+1} + \Sigma(\mathfrak{p}_{m+1} \cdot P_{n+1})],$$

$$^{k'}R_{m+1,n+1} = \frac{r}{\mathfrak{p}_{m+1} \cdot P_{n+1}}[-\mathfrak{p}_{m} \cdot P_{n} + \Sigma(\mathfrak{p}_{m} \cdot P_{n})],$$

oder nach (3) und (4):

$$^{k}R_{m+1,n+1} = -r + \frac{\mathfrak{p}_{m} \cdot P_{n}}{\mathfrak{p}_{m+1} \cdot P_{n+1}} \cdot {}^{k}R_{m,n}$$

$$^{k'}R_{m+1,n+1} = -r + \frac{\mathfrak{p}_{m} \cdot P_{n}}{\mathfrak{p}_{m+1} \cdot P_{n+1}} \cdot {}^{k'}R_{m,n},$$

woraus folgt:

$$^{k}R_{m,n} = \frac{\mathfrak{p}_{m+1} \cdot P_{n+1}}{\mathfrak{p}_{m} \cdot P_{n}}({}^{k}R_{m+1,n+1} + r) \quad \ldots \ldots (7)$$

$$^{k'}R_{m,n} = \frac{\mathfrak{p}_{m+1} \cdot P_{n+1}}{\mathfrak{p}_{m} \cdot P_{n}}({}^{k'}R_{m+1,n+1} + r). \quad \ldots \ldots (8).$$

Diese Gleichungen gewähren den Vortheil, daß man den für ein gewisses Alter berechneten baaren Werth bei der Bestimmung des baaren Werthes einer Verbindungsrente für zwei Personen, von welchen jede ein Jahr jünger ist, wieder vortheilhaft verwenden kann, und eignen sich darum besonders zur Berechnung von Tabellen, indem man hierbei mit dem höchsten Alter beginnt.

4) Beziehen mehr als zwei Personen eine Verbindungsrente so lange als sie zusammen am Leben sind, so geschieht die Bestimmung des baaren Werthes derselben ganz analog wie für zwei Personen.

So findet man z. B. für 3 Personen, welche der Reihe nach m, n, q Jahre zählen, den Baarwerth der Verbindungsrente

$$^{k}R_{m,n,q} = \frac{r}{\mathfrak{p}_{m} \cdot P_{n} \cdot P_{q}}(\mathfrak{p}_{m+1} \cdot P_{n+1} \cdot P_{q+1} + \mathfrak{p}_{m+2} \cdot P_{n+2} \cdot P_{q+2} + \ldots)$$

$$= \frac{r}{\mathfrak{p}_{m} \cdot P_{n} \cdot P_{q}} \cdot \Sigma(\mathfrak{p}_{m+1} \cdot P_{n+1} \cdot P_{q+1}) \quad \ldots \ldots \ldots (9)$$

wenn die Rente postnumerando ausbezahlt wird;
dagegen

$$^{k'}R_{m,n,q} = \frac{r}{\mathfrak{p}_{m} \cdot P_{n} \cdot P_{q}} \Sigma(\mathfrak{p}_{m} \cdot P_{n} \cdot P_{q}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

wenn dieselbe praenumerando fällig ist.

Anmerkung. Auf analoge Weise findet man leicht die Resultate für 4 und mehr Personen.

5) Aus (9) und (10) folgen unmittelbar für die Renteneinheit die Baarwerthe:

$$ {}^{k}\varrho_{m,n,q} = \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} \,.\, P_{n+1} \,.\, P_{q+1})}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_n \,.\, P_q} \ldots \ldots (11) $$

$$ {}^{k'}\varrho_{m,n,q} = \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_m \,.\, P_n \,.\, P_q)}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_n \,.\, P_q} \ldots \ldots \ldots \ldots (12). $$

6) Beziehen die drei oben angeführten Personen eine nachschüssige Rente so lange, als wenigstens noch zwei derselben zusammen leben, so wird für diese Rente der Baarwerth

$$ {}^{2}R_{m,n,q} = r({}^{k}\varrho_{m,n} + {}^{k}\varrho_{m,q} + {}^{k}\varrho_{n,q} - 2 \,.\, {}^{k}\varrho_{m,n,q}) \ldots (13), $$

oder wenn man die betreffenden Werthe substituirt:

$$ {}^{2}R_{m,n,q} = r\left[\frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} \,.\, P_{n+1})}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_n} + \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} \,.\, P_{q+1})}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_q} + \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{n+1} \,.\, P_{q+1})}{\mathfrak{P}_n \,.\, P_q} - \frac{2 \,.\, \Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} \,.\, P_{n+1} \,.\, P_{q+1})}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_n \,.\, P_q}\right] \ldots (14). $$

Denn bezeichnen wir die 3 Personen der Reihe nach durch A, B, C und nehmen nun an, daß jedes der Paare A und B, B und C, A und C eine Verbindungsrente auf das kürzeste Leben beziehe, so wäre der Baarwerth dieser drei Verbindungsrenten

$$ = r({}^{k}\varrho_{m,n} + {}^{k}\varrho_{m,q} + {}^{k}\varrho_{n,q}). $$

Da aber in diesem Falle, so lange die 3 Personen zusammen leben, zwei Renten zu viel ausbezahlt würden, so muß man, um den verlangten Baarwerth zu erhalten, den doppelten baaren Werth der Verbindungsrente der 3 Personen A, B und C auf das kürzeste Leben oder $2\,r \,.\, {}^{k}\varrho_{m,n,q}$ von obiger Summe in Abzug bringen.

Für eine vorschüssige Verbindungsrente folgt unter vorstehender Voraussetzung:

$$ {}^{2'}R_{m,n,q} = r({}^{k'}\varrho_{m,n} + {}^{k'}\varrho_{m,q} + {}^{k'}\varrho_{n,q} - 2 \,.\, {}^{k'}\varrho_{m,n,q}) \ldots (15) $$

$$ = r\left[\frac{\Sigma(\mathfrak{P}_m \,.\, P_n)}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_n} + \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_m \,.\, P_q)}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_q} + \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_n \,.\, P_q)}{\mathfrak{P}_n \,.\, P_q} - \frac{2\Sigma \,.\, (\mathfrak{P}_m \,.\, P_n \,.\, P_q)}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_n \,.\, P_q}\right] \ldots (16). $$

Beispiele.

1) Zwei Personen A und B, von welchen A 90, B 93 Jahre alt ist, beziehen eine nachschüssige Verbindungsrente von 10000 Mk. auf

das kürzeste Leben; wie groß ist der baare Werth derselben, wenn 4prozentige Zinsen berechnet werden?

Auflösung.

Führt man in obige Gleichung (3) nach Tabelle II die betreffenden Werthe ein, so folgt aus

$$^{k}R_{90.93} = \frac{10000}{\mathfrak{p}_{90} \cdot P_{93}} \cdot \Sigma(\mathfrak{p}_{91} \cdot P_{94})$$

$$= \frac{10000}{\mathfrak{p}_{90} \cdot P_{93}} \cdot (\mathfrak{p}_{91} \cdot P_{94} + \mathfrak{p}_{92} \cdot P_{95})$$

sofort:

$$^{k}R_{90,93} = \frac{10000}{0,1758548 \,.\, 3}(0,1409093 \,.\, 2 + 0,1083918 \,.\, 1)$$

$$= \frac{3902,104}{0,5275644} = 7396,4 \text{ Mk.}$$

Anmerkung. Wird die Rente vorschußweise bezogen, so wird $^{k'}R_{90,93} = 17396,4$ Mk.

2) Drei Personen, welche gegenwärtig 90, 87 und 84 Jahre alt sind, wünschen eine nachschüssige Verbindungsrente von 3000 Mk. auf das kürzeste Leben zu beziehen; wie groß ist die zu machende baare Einlage bei Berechnung eines 3prozentigen Zinsfußes?

Auflösung.

Nach Gleichung (9) ist der Baarwerth

$$^{k}R_{90.87.84} = \frac{3000}{\mathfrak{p}_{90} \cdot P_{87} \cdot P_{84}} \cdot \Sigma(\mathfrak{p}_{91} \cdot P_{88} \cdot P_{85})$$

$$= \frac{3000}{\mathfrak{p}_{90} \cdot P_{87} \cdot P_{84}} (\mathfrak{p}_{91} \cdot P_{88} \cdot P_{85} + \mathfrak{p}_{92} \cdot P_{89} \cdot P_{86} + \mathfrak{p}_{93} \cdot P_{90} \cdot P_{87} + \mathfrak{p}_{94} \cdot P_{91} \cdot P_{88} + \mathfrak{p}_{95} \cdot P_{92} \cdot P_{89})$$

$$= \frac{3000}{0,4195690 \,.\, 12 \,.\, 20}(0,3394570 \,.\, 10 \,.\, 17 + 0,2636560 \,.\, 8 \,.\, 14 + 0,1919825 \,.\, 6 \,.\, 12 + 0,1242605 \,.\, 5 \,.\, 10 + 0,0603207 \,.\, 4 \,.\, 8)$$

$$= \frac{3000}{100,69656}(57,70769 + 29,529472 + 13,82274 + 6,213025 + 1,930262)$$

$$= \frac{3000 \,.\, 109,203189}{100,69656} = 3253,43 \text{ Mk.}$$

3) Drei Personen, welche gegenwärtig 91, 88 und 85 Jahre alt sind, sichern sich eine Verbindungsrente von 6000 Mk. in der Weise, daß dieselbe postnumerando so lange bezogen wird, als noch wenigstens zwei von ihnen leben; wie groß ist die baare Einlage, wenn der Zinsfuß zu 4 % berechnet wird?

Auflösung.

Nach Gleichung (13) ist

$$^{2}R_{91.88.85} = 6000\,({}^{k}\varrho_{91.88} + {}^{k}\varrho_{91.85} + \varrho_{88.85} - 2\,.\,{}^{k}\varrho_{91.88.85})$$

$$= 6000\left[\frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{92}\,.\,P_{89})}{\mathfrak{p}_{91}\,.\,P_{88}} + \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{92}\,.\,P_{88})}{\mathfrak{p}_{91}\,.\,P_{85}} + \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{89}\,.\,P_{86})}{\mathfrak{p}_{88}\,.\,P_{85}} - \frac{2\Sigma(\mathfrak{p}_{92}\,.\,P_{89}\,.\,P_{86})}{\mathfrak{p}_{91}\,.\,P_{88}\,.\,P_{85}}\right].$$

Nun ist aber

$${}^{k}\varrho_{91.88} = \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{92}\,.\,P_{89})}{\mathfrak{p}_{91}\,.\,P_{88}} = \frac{1}{\mathfrak{p}_{91}.P_{88}}(\mathfrak{p}_{92}\,.\,P_{89} + \mathfrak{p}_{93}\,.\,P_{90} + \mathfrak{p}_{94}\,.\,P_{91} + \mathfrak{p}_{95}\,.\,P_{92})$$

$$= \frac{1}{0{,}1409093\,.\,10}(0{,}1083918\,.\,8 + 0{,}0781671\,.\,6 + 0{,}0501071\,.\,5 + 0{,}0240900\,.\,4)$$

$$= \frac{1}{1{,}409093}(0{,}8671344 + 0{,}4690026 + 0{,}2505355 + 0{,}0963600)$$

$$= \frac{1{,}6830325}{1{,}409093} = 1{,}194407.$$

$${}^{k}\varrho_{91.85} = \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{92}\,.\,P_{86})}{\mathfrak{p}_{91}\,.\,P_{85}} = \frac{1}{\mathfrak{p}_{91}.P_{85}}(\mathfrak{p}_{92}\,.\,P_{86} + \mathfrak{p}_{93}\,.\,P_{87} + \mathfrak{p}_{94}\,.\,P_{88} + \mathfrak{p}_{95}\,.\,P_{89})$$

$$= \frac{1}{0{,}1409093\,.\,17}(0{,}1083918\,.\,14 + 0{,}0781671\,.\,12 + 0{,}0501071\,.\,10 + 0{,}0240900\,.\,8)$$

$$= \frac{1}{2{,}3954581}(1{,}5174852 + 0{,}9380052 + 0{,}5010710 + 0{,}1927200)$$

$$= \frac{3{,}1492814}{2{,}3954581} = 1{,}31469.$$

$${}^{k}\varrho_{88.85} = \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{89}.P_{86})}{\mathfrak{p}_{88}\,.\,P_{85}} = \frac{1}{\mathfrak{p}_{88}.P_{85}}(\mathfrak{p}_{89}\,.\,P_{88} + \mathfrak{p}_{90}\,.\,P_{87} + \mathfrak{p}_{91}\,.\,P_{88} + \mathfrak{p}_{92}\,.\,P_{89} + \mathfrak{p}_{93}\,.\,P_{90} + \mathfrak{p}_{94}\,.\,P_{91} + \mathfrak{p}_{95}\,.\,P_{92})$$

$$= \frac{1}{0{,}3170075\,.\,17}(0{,}2438519\,.\,14 + 0{,}1758548\,.\,12 + 0{,}1409093.10 + 0{,}1083918\,.\,8 + 0{,}0781671\,.\,6 + 0.0501071\,.\,5 + 0{,}0240900\,.\,4)$$

$$= \frac{1}{5{,}3891275}(3{,}4139266 + 2{,}1102576 + 1{,}4090930 + 0{,}8661344 + 0{,}4690026 + 0{,}2505355 + 0{,}0963600)$$

$$= \frac{86{,}153097}{5{,}3891275} = 1{,}59864.$$

$$2\,.\,{}^k\varrho_{91.88.85} = \frac{2\Sigma(\mathfrak{p}_{92}\,.\,P_{89}\,.\,P_{86})}{\mathfrak{p}_{91}\,.\,P_{88}\,.\,P_{85}} = \frac{2}{\mathfrak{p}_{91}\,.\,P_{88}\,.\,P_{85}}(\mathfrak{p}_{92}\,.\,P_{89}\,.\,P_{86} + \mathfrak{p}_{93}\,.\,P_{90}\,.\,P_{87} + \mathfrak{p}_{94}\,.\,P_{91}\,.\,P_{88} + \mathfrak{p}_{95}\,.\,P_{92}\,.\,P_{89})$$

$$= \frac{2}{0{,}1409093\,.\,10\,.\,17}(0{,}1083918\,.\,8\,.\,14 + 0{,}0781671\,.\,6\,.\,12 + 0{,}0501071\,.\,5\,.\,10 + 0{,}0240900\,.\,4\,.\,8)$$

$$= \frac{2}{23{,}954581}(12{,}1398816 + 5{,}6280312 + 2{,}5053550 + 0{,}7708800)$$

$$= \frac{2\,.\,21{,}0441478}{23{,}954581} = \frac{42{,}0882956}{23{,}954581} = 1{,}757;$$

folglich wird der Baarwerth

$${}^2R_{91.88.86} = 6000(1{,}194407 + 1{,}31469 + 1{,}59864 - 1{,}757)$$
$$= 6000\,.\,2{,}350737 = 14104{,}422 \text{ Mk.}$$

2) Aufgeschobene Verbindungsrente.

§. 53. Aufgabe.

Zwei Personen, von welchen die eine m, die andere n Jahre alt ist, haben eine nach a Jahren beginnende nachschüssige, also nach (a+1) Jahren zum ersten Male fällige (um a Jahre aufgeschobene) Verbindungsrente r so lange zu beziehen, als beide noch am Leben sind; wie groß ist der baare Werth ${}^k_a R_{m,n}$ dieser Rente?

Auflösung.

Nehmen wir an, daß sich zu gleicher Zeit $P_m\,.\,P_n$ Paare betheiligen, so leben von diesen nach §. 52 am Ende des

(a+1)ten, (a+2)ten, (a+3)ten, ...

Jahres noch

$P_{m+a+1}\,.\,P_{n+a+1},\ P_{m+a+2}\,.\,P_{n+a+2},\ P_{m+a+3}\,.\,P_{n+a+3}\ \ldots.$

vollständige Paare und die Rentenanstalt hat somit eine baare Ausgabe

$$= r\left(\frac{P_{m+a+1}\,.\,P_{n+a+1}}{1{,}0p^{a+1}} + \frac{P_{m+a+2}\,.\,P_{n+a+2}}{1{,}0p^{a+2}} + \frac{P_{m+a+3}\,.\,P_{n+a+3}}{1{,}0p^{a+3}} + \ldots\right)$$

$$= r\,.\,1{,}0p^m\left(\frac{P_{m+a+1}}{1{,}0p^{m+a+1}}\,.\,P_{n+a+1} + \frac{P_{m+a+2}}{1{,}0p^{m+a+2}}\,.\,P_{n+a+2} + \ldots.\right)$$

$$= r\,.\,1{,}0p^m(\mathfrak{p}_{m+a+1}\,.\,P_{n+a+1} + \mathfrak{p}_{m+a+2}\,.\,P_{n+a+2} + \ldots\ldots..)$$

$$= r\,.\,1{,}0p^m\,.\,\Sigma(\mathfrak{p}_{m+a+1}\,.\,P_{n+a+1})\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Die **baare Einnahme** der Anstalt ist dagegen

$$= P_m \,.\, P_n \,.\, {}^k_a R_{m,n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

und man erhält daher durch Gleichsetzung der Ausdrücke (1) und (2) für den verlangten Baarwerth

$${}^k_a R_{m,n} = \frac{r \,.\, 1{,}0p^m \,.\, \Sigma(\mathfrak{p}_{m+a+1} \,.\, P_{n+a+1})}{P_m \,.\, P_n}$$

oder

$${}^k_a R_{m,n} = \frac{r \,.\, \Sigma(\mathfrak{p}_{m+a+1} \,.\, P_{n+a+1})}{\mathfrak{p}_m \,.\, P_n} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Zusätze.

1) Wird die Rente zum ersten Male am Ende von a Jahren ausbezahlt, wird dieselbe also als eine um a Jahre aufgeschobene **vorschüssige** Rente angesehen, so wird der baare Werth

$${}^{k'}_a R_{m,n} = \frac{r . \Sigma(\mathfrak{p}_{m+a} \,.\, P_{n+a})}{\mathfrak{p}_m \,.\, P_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

2) Für r = 1 folgt aus (3) und (4):

$${}^k_a \varrho_{m,n} = \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{m+a+1} \,.\, P_{n+a+1})}{\mathfrak{p}_m \,.\, P_n} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$${}^{k'}_a \varrho_{m,n} = \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{m+a} \,.\, P_{n+a})}{\mathfrak{p}_m \,.\, P_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

3) Berücksichtigt man, daß nach §. 52 (3) und (4)

$$\frac{r\Sigma(\mathfrak{p}_{m+a+1} \,.\, P_{n+a+1})}{\mathfrak{p}_{m+a} \,.\, P_{n+a}} = {}^k R_{(m+a),\,(n+a)}$$

und

$$\frac{r\Sigma(\mathfrak{p}_{m+a} \,.\, P_{n+a})}{\mathfrak{p}_{m+a} \,.\, P_{n+a}} = {}^{k'} R_{(m+a),\,(n+a)},$$

so lassen sich obige Gleichungen (3) und (4) auch auf folgende Weise darstellen:

$${}^k_a R_{m,n} = \frac{\mathfrak{p}_{m+a} \,.\, P_{n+a}}{\mathfrak{p}_m \,.\, P_n} \,.\, {}^k R_{(m+a),\,(n+a)} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

$${}^{k'}_a R_{m,n} = \frac{\mathfrak{p}_{m+a} \,.\, P_{n+a}}{\mathfrak{p}_m \,.\, P_n} \,.\, {}^{k'} R_{(m+a),\,(n+a)} \quad \ldots\ldots\ldots (8),$$

Beispiel.

Eine 83= und eine 80jährige Person sichern sich eine nach 6 Jahren zum ersten Male zu beziehende Verbindungsrente von 500 Mk., deren Genuß alsdann so lange dauert, als noch beide am Leben sind. Wie groß ist der baare Werth dieser Rente bei Ansatz 4 prozentiger Zinsen?

Auflösung.

Nach Gleichung (3) wird, wenn man die Rente als eine nachschüssige betrachtet, also a = 5 setzt, der Baarwerth

$$ {}^{k}_{6}R_{83,80} = \frac{5000}{\mathfrak{p}_{83} . P_{80}} \Sigma(\mathfrak{p}_{89} . P_{86}) $$

$$ = \frac{5000}{\mathfrak{p}_{83} . P_{80}} (\mathfrak{p}_{89} . P_{86} + \mathfrak{p}_{90} . P_{87} + \mathfrak{p}_{91} . P_{88} + \mathfrak{p}_{92} . P_{89} + \mathfrak{p}_{93} . P_{90} + \mathfrak{p}_{94} . P_{91} + \mathfrak{p}_{95} . P_{92}) $$

$$ = \frac{5000}{0{,}925651 . 37} (0{,}2438519 . 14 + 0{,}1758548 . 12 + 0{,}1409093 . 10 + 0{,}1083918 . 8 + 0{,}0781671 . 6 + 0{,}0501071 . 5 + 0{,}0240900 . 4) $$

$$ = \frac{5000}{34{,}249087} (3{,}4139266 + 2{,}1102576 + 1{,}4090930 + 0{,}8671344 + 0{,}469026 + 0{,}2505355 + 0{,}0963600) $$

$$ = \frac{5000 . 8{,}6163097}{34{,}249087} = 1257{,}88 \text{ Mk.} $$

Anmerkung. Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man in (4) a = 6 setzt.

3) Temporäre Verbindungsrente.

§. 54. Aufgabe.

Eine m- und eine njährige Person haben eine nachschüssige Verbindungsrente r nur t Jahre lang zu beziehen, im Falle sie so lange zusammen leben; wie groß ist der baare Werth ${}_{(t)}R_{m,n}$ derselben?

Auflösung.

Der baare Werth ist offenbar gleich der Differenz des baaren Werthes einer nachschüssigen Verbindungsrente weniger dem baaren Werthe einer um t Jahre aufgeschobenen, postnumerando fälligen Verbindungsrente auf das kürzeste Leben. Man hat daher nach §. 52 und §. 53

$$ {}_{(t)}R_{m,n} = r({}^{k}\varrho_{m,n} - {}^{k}_{t}\varrho_{m,n}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1) $$

oder, wenn man die betreffenden Werthe einführt:

$$ {}_{(t)}R_{m,n} = \frac{r}{\mathfrak{p}_{m} . P_{n}} [\Sigma(\mathfrak{p}_{m+1} P_{.n+1}) - \Sigma(_{m+t+1} . P_{n+t+1})] \ldots (2). $$

Zusätze.

1) Soll die Rente vorschußweise bezogen werden, so hat man zu setzen:

$$_{(t)}{}'R_{m,n} = r({}^{k'}\varrho_{m,n} - {}^{k'}_{t}\varrho_{m,n}) \;\ldots\ldots\; (3)$$

oder

$$_{(t)}{}'R_{m,n} = \frac{r}{\mathfrak{p}_m \,.\, P_n}[\Sigma(\mathfrak{p}_m \,.\, P_n) - \Sigma(\mathfrak{p}_{m+t} \,.\, P_{n+t})] \;\ldots\; (4).$$

2) Für r = 1 wird

$$_{(t)}\varrho_{m,n} = {}^{k}\varrho_{m,n} - {}^{k}_{t}\varrho_{m,n} \;\ldots\ldots\; (5)$$

$$_{(t)}{}'\varrho_{m,n} = {}^{k'}\varrho_{m,n} - {}^{k}_{t}\varrho_{m,n} \;\ldots\ldots\; (6).$$

Beispiel.

Eine 88- und eine 85jährige Person haben während 3 Jahren eine nachschüssige Verbindungsrente von 8000 Mk. zu beziehen; wie groß ist deren baarer Werth bei Berechnung eines 4prozentigen Zinsfußes?

Auflösung.

Nach Gleichung (2) hat man

$$_{(3)}R_{88.85} = \frac{8000}{\mathfrak{p}_{88} \,.\, P_{85}}[\Sigma(\mathfrak{p}_{89} \,.\, P_{86}) - \Sigma(\mathfrak{p}_{92} \,.\, P_{89})]$$

$$= \frac{8000}{\mathfrak{p}_{88} \,.\, P_{85}}(\mathfrak{p}_{89} \,.\, P_{86} + \mathfrak{p}_{90} \,.\, P_{87} + \mathfrak{p}_{91} \,.\, P_{88})$$

$$= \frac{8000}{0{,}3170075 \,.\, 17}(0{,}2438519 \,.\, 14 + 0{,}1758548 \,.\, 12 + 0{,}1409093 \,.\, 10)$$

$$= \frac{8000}{5{,}3891275}(3{,}4139266 + 2{,}1102576 + 1{,}4090930)$$

$$= \frac{8000 \,.\, 6{,}9332772}{5{,}3891275} = 10292{,}2 \text{ Mk.}$$

4) Aufgeschobene temporäre Verbindungsrente.

§. 55. Aufgabe.

Eine m- und eine njährige Person haben eine nachschüssige, um a Jahre aufgeschobene Verbindungsrente t Jahre lang zu beziehen (im Falle beide noch am Leben sind); wie groß ist der baare Werth $_{a,(t)}R_{m,n}$ dieser aufgeschobenen temporären Verbindungsrente?

Auflösung.

Der baare Werth ist offenbar gleich der Differenz des baaren Werthes einer um a Jahre, weniger dem einer um (a + t) Jahre

aufgeschobenen nachschüssigen Verbindungsrente auf das kürzeste Leben.

Man hat daher

$$_{a,(t)}R_{m,n} = r({}^{k}_{a}\varrho_{m,n} - {}^{k}_{a+t}\varrho_{m,n}) \quad \ldots\ldots (1)$$

oder wenn man die betreffenden Werthe aus §. 53 (5) einführt:

$$_{a,(t)}R_{m,n} = \frac{r}{\mathfrak{p}_m \cdot P_n}[\Sigma(\mathfrak{p}_{m+a+1} \cdot P_{n+a+1}) - \Sigma(\mathfrak{p}_{m+a+t+1} \cdot P_{n+a+t+1})] \quad \ldots\ldots (2).$$

Zusätze.

1) Betrachtet man die Rente als eine vorschüssige, wird dieselbe also nicht erst nach (a + 1), sondern schon nach a Jahren zum ersten Male bezogen, so wird

$$_{a,(t)}'R_{m,n} = r({}^{k'}_{a}\varrho_{m,n} - {}^{k'}_{a+t}\varrho_{m,n}) \quad \ldots\ldots (3)$$

oder

$$_{a,(t)}'R_{m,n} = \frac{r}{\mathfrak{p}_m \cdot P_n}[\Sigma(\mathfrak{p}_{m+a} \cdot P_{n+a}) - \Sigma(\mathfrak{p}_{m+a+t} \cdot P_{n+a+t})] \ldots (4).$$

2) Für r = 1 gehen (1) und (3) über in

$$_{a,(t)}\varrho_{m,n} = {}^{k}_{a}\varrho_{m,n} - {}^{k}_{a+t}\varrho_{m,n} \quad \ldots\ldots (5)$$

und

$$_{a,(t)}'\varrho_{m,n} = {}^{k'}_{a}\varrho_{m,n} - {}^{k'}_{a+t}\varrho_{m,n} \quad \ldots\ldots (6).$$

Beispiel.

Eine 80= und eine 77 jährige Person haben nach 8 Jahren eine nachschüssige Verbindungsrente von 4000 Mk. auf 3 Jahre zu beziehen; wie groß ist deren baarer Werth bei 4 prozentiger Zinsenberechnung?

Auflösung.

Nach Gleichung (2) hat man

$$_{8,(3)}R_{80,77} = \frac{4000}{\mathfrak{p}_{80} \cdot P_{77}}[\Sigma(\mathfrak{p}_{89} \cdot P_{86}) - \Sigma(\mathfrak{p}_{92} \cdot P_{89})]$$

$$= \frac{4000}{\mathfrak{p}_{80} \cdot P_{77}}(\mathfrak{p}_{89} \cdot P_{86} + \mathfrak{p}_{90} \cdot P_{87} + \mathfrak{p}_{91} \cdot P_{88})$$

$$= \frac{4000}{1{,}6052315.55}(0{,}2438519.14 + 0{,}1758548.12 + 0{,}1409093.10)$$

$$= \frac{4000}{88{,}2877325}(3{,}4139266 + 2{,}1102576 + 1{,}4090930)$$

$$= \frac{4000 \cdot 6{,}9332772}{88{,}2877325} = 314{,}12 \text{ Mk.}$$

c) Verbindungsrenten auf das längste Leben.

1) Sogleich beginnende Verbindungsrente.

§. 56. Aufgabe.

Zwei Personen A und B, von welchen die erste m, die zweite n Jahre zählt, haben eine nachschüssige Verbindungsrente r auf das längste Leben zu beziehen; wie groß ist der baare Werth $'R_{m,n}$ derselben?

Auflösung.

In diesem Falle wird die Rente so lange ausbezahlt, als überhaupt noch eine der beiden Personen lebt. Nehmen wir darum an, es beziehe jede der beiden Personen die Rente r, so würde diese von der Bank so lange doppelt ausgegeben, als beide zusammen leben. Um daher den baaren Werth der Verbindungsrente zu finden, haben wir von der Summe der baaren Werthe einer lebenslänglichen Leibrente r für eine mjährige und einer solchen für eine njährige Person, den baaren Werth einer Verbindungsrente r auf das kürzeste Leben für eine m= und eine njährige Person zu subtrahiren. Nach §. 48 und §. 52 wird somit

$$'R_{m,n} = r(\varrho_m + \varrho_n - {}^k\varrho_{m,n}) \; \ldots\ldots (1),$$

oder wenn man die betreffenden Werthe einführt:

$$'R_{m,n} = r\left[\frac{\Sigma \mathfrak{P}_{m+1}}{\mathfrak{P}_m} + \frac{\Sigma \mathfrak{P}_{n+1}}{\mathfrak{P}_n} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} \cdot P_{n+1})}{\mathfrak{P}_m \cdot P_n}\right] \ldots\ldots (2).$$

Zusätze.

1) Für eine praenumerando zahlbare Verbindungsrente auf das längste Leben folgt:

$$'R_{m,n} = r('\varrho_m + '\varrho_n - {}^{k\prime}\varrho_{m,n}) \; \ldots\ldots (3),$$

oder

$$'R_{m,n} = r\left[\frac{\Sigma \mathfrak{P}_m}{\mathfrak{P}_m} + \frac{\Sigma \mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_n} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_m \cdot P_n)}{\mathfrak{P}_m \cdot P_n}\right] \ldots\ldots (4).$$

2) Für r = 1 gehen (1) und (3) über in:

$$'\varrho_{m,n} = \varrho_m + \varrho_n - {}^k\varrho_{m,n} \ldots\ldots (5)$$

$$''\varrho_{m,n} = '\varrho_m + '\varrho_n - {}^{k\prime}\varrho_{m,n} \ldots\ldots (6).$$

3) Um einen Ausdruck für den baaren Werth $'R_{m,n,q}$ der

Verbindungsrente r auf das längste Leben für eine m=, eine n= und eine q jährige Person zu entwickeln, berücksichtige man, daß die Summe aus:

1) dem baaren Werthe ${}^{k}R_{m,n,q}$ der Verbindungsrente r auf das kürzeste Leben der drei Personen,
2) dem baaren Werthe ${}^{2}R_{m,n,q}$ der Verbindungsrente r, welche so lange bezogen wird, als noch zwei der Personen zusammen leben,
3) dem baaren Werthe ${}^{l}R_{m,n,q}$ der Verbindungsrente r auf das längste Leben der drei Personen

ebenso groß, als die Summe der Baarwerthe $R_m + R_n + R_q$ einer lebenslänglichen Leibrente r für eine m=, für eine n= und für eine q jährige Person sein muß.

Man erhält hiernach die Gleichung

$$ {}^{k}R_{m,n,q} + {}^{2}R_{m,n,q} + {}^{l}R_{m,n,q} = R_m + R_n + R_q $$

und daraus

$$ {}^{l}R_{m,n,q} = R_m + R_n + R_q - {}^{k}R_{m,n,q} - {}^{2}R_{m,n,q} \ldots (7). $$

oder nach §. 52 (13):

$$ {}^{l}R_{m,n,q} = r(\varrho_m + \varrho_n + \varrho_q - {}^{k}\varrho_{m,n} - {}^{k}\varrho_{m,q} - {}^{k}\varrho_{n,q} + {}^{k}\varrho_{m,n,q}) \,..\, (8) $$

oder auch:

$$ {}^{l}R_{m,n,q} = r\left[\frac{\Sigma\mathfrak{P}_{m+1}}{\mathfrak{P}_m} + \frac{\Sigma\mathfrak{P}_{n+1}}{\mathfrak{P}_n} + \frac{\Sigma\mathfrak{P}_{q+1}}{\mathfrak{P}_q} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} . P_{n+1})}{\mathfrak{P}_m . P_n} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} . P_{q+1})}{\mathfrak{P}_m . P_q} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{n+1} . P_{q+1})}{\mathfrak{P}_n . P_q} + \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} . P_{n+1} . P_{q+1})}{\mathfrak{P}_m . P_n . P_q}\right] (9). $$

Wird die Verbindungsrente praenumerando berechnet, so ist der Baarwerth

$$ {}^{l\prime}R_{m,n,q} = {}^{l}R_{m,n,q} + r $$

$$ = r({}^{\prime}\varrho_m + {}^{\prime}\varrho_n + {}^{\prime}\varrho_q - {}^{k\prime}\varrho_{m,n} - {}^{k\prime}\varrho_{m,q} - {}^{k\prime}\varrho_{n,q} + {}^{k\prime}\varrho_{m,n,q}) \ldots (10) $$

$$ = r\left[\frac{\Sigma\mathfrak{P}_m}{\mathfrak{P}_m} + \frac{\Sigma\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_n} + \frac{\Sigma\mathfrak{P}_q}{\mathfrak{P}_q} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_m . P_n)}{\mathfrak{P}_m . P_n} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_m . P_q)}{\mathfrak{P}_m . P_q} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_n . P_q)}{\mathfrak{P}_n . P_q} + \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_m . P_n . P_q)}{\mathfrak{P}_m . P_n . P_q}\right] \ldots\ldots (11). $$

Anmerkung. In ähnlicher Weise läßt sich diese Betrachtung auf 4 und mehr Personen ausdehnen.

Beispiele.

1) Zwei Personen A und B, von welchen A 87, B 90 Jahre alt ist, haben eine nachschüssige Verbindungsrente auf das längste

Leben zu beziehen; wie groß ist der baare Werth der Renteneinheit bei 4 prozentiger Zinsenberechnung?

Auflösung.

Nach Gleichung (5) erhält man:

$$'\varrho_{87.90} = \varrho_{87} + \varrho_{90} - {}^k\varrho_{87.90}$$
$$= \frac{\Sigma\mathfrak{P}_{88}}{\mathfrak{P}_{87}} + \frac{\Sigma\mathfrak{P}_{91}}{\mathfrak{P}_{90}} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{88}.P_{91})}{\mathfrak{P}_{87}.P_{90}}$$
$$= \frac{\Sigma\mathfrak{P}_{88}}{\mathfrak{P}_{87}} + \frac{\Sigma\mathfrak{P}_{91}}{\mathfrak{P}_{90}} - \frac{1}{\mathfrak{P}_{87}.P_{90}}(\mathfrak{P}_{88}.P_{91} + \mathfrak{P}_{89}.P_{92} + \mathfrak{P}_{90}.P_{93} + \mathfrak{P}_{91}.P_{94} + \mathfrak{P}_{92}.P_{95})$$
$$= \frac{1,1383795}{0,3956254} + \frac{0,4016653}{0,1758548} - \frac{1}{0,3956254.6}(0,3170075.5 + 0,2438519.4 + 0,1758548.3 + 0,1409093.2 + 0,1083918.1)$$
$$= \frac{1,1383795}{0,3956254} + \frac{0,4016653}{0,1758548} - \frac{3,4782199}{2,3737524}$$
$$= 2,8774 + 2,2840 - 1,4652 = 3,6962 \text{ Mk.}$$

2) Drei Personen, welche 91, 88 und 85 Jahre alt sind, sichern sich eine nachschüssige Verbindungsrente von 3000 Mk. auf das längste Leben; wie groß ist der baare Werth derselben, wenn dem Zinsfuße 4 % zu Grunde gelegt werden?

Auflösung.

Nach Gleichung (8) hat man:

$$'R_{91.88.85} = 3000\,(\varrho_{91} + \varrho_{88} + \varrho_{85} - {}^k\varrho_{91.88} - {}^k\varrho_{91.85} - {}^k\varrho_{88.85} + {}^k\varrho_{91.88.85}).$$

Nun ist aber

$$\varrho_{91} = \frac{\Sigma\mathfrak{P}_{92}}{\mathfrak{P}_{91}} = \frac{0,2607560}{0,1409093} = 1,85051$$
$$\varrho_{88} = \frac{\Sigma\mathfrak{P}_{89}}{\mathfrak{P}_{88}} = \frac{0,8213720}{0,3170075} = 2,59102$$
$$\varrho_{85} = \frac{\Sigma\mathfrak{P}_{86}}{\mathfrak{P}_{85}} = \frac{2,0140302}{0,6062034} = 3,32236$$

und nach dem Beispiele 3 zu §. 52:

$${}^k\varrho_{91.88} = \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{92}.P_{89})}{\mathfrak{P}_{91}.P_{88}} = 1,194407$$
$${}^k\varrho_{91.85} = \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{92}.P_{86})}{\mathfrak{P}_{91}.P_{85}} = 1,31469$$
$${}^k\varrho_{88.85} = \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{89}.P_{86})}{\mathfrak{P}_{88}.P_{85}} = 1,59864$$

$$^{k}\varrho_{91\,88\,85} = \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{92}\,.\,P_{89}\,.\,P_{86})}{\mathfrak{P}_{91}\,.\,P_{88}\,.\,P_{85}} = \frac{1,757}{2} = 0,8785,$$

folglich wird der Baarwerth

$$'R_{91.88.85} = 3000(1,85051 + 2,59102 + 3,32236 - 1,194407 - 1,31469 - 1,59864 + 0,8785)$$
$$= 3000\,.\,4,53499 = 13604,97 \text{ Mk.}$$

2) Aufgeschobene Verbindungsrente.

§. 57. Aufgabe.

Eine m= und eine njährige Person haben eine um a Jahre aufgeschobene nachschüssige Verbindungsrente r auf das längste Leben zu beziehen*); wie groß ist der baare Werth $_{a}^{\prime}R_{m,n}$?

Auflösung.

Setzt man in der Gleichung (1) des §. 54 statt der Baarwerthe von sogleich beginnenden nachschüssigen Leibrenten, die baaren Werthe der um a Jahre aufgeschobenen nachschüssigen Renten, so folgt unmittelbar:

$$_{a}^{\prime}R_{m,n} = r({}_{a}\varrho_{m} + {}_{a}\varrho_{n} - {}_{a}^{k}\varrho_{m,n}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$
$$= r\left[\frac{\Sigma\mathfrak{P}_{m+a+1}}{\mathfrak{P}_{m}} + \frac{\Sigma\mathfrak{P}_{n+a+1}}{\mathfrak{P}_{n}} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{m+a+1}\,.\,P_{n+a+1})}{\mathfrak{P}_{m}\,.\,P_{n}}\right] \ldots (2)$$

Zusatz.

Für eine aufgeschobene vorschüssige Leibrente, deren Bezug also zum ersten Male am Ende des aten Jahres stattfindet, folgt:

$$_{a}'R_{m,n} = r({}_{a}'\varrho_{m} + {}_{a}'\varrho_{n} - {}_{a}^{k\prime}\varrho_{m,n}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$
$$= r\left[\frac{\Sigma\mathfrak{P}_{m+a}}{\mathfrak{P}_{m}} + \frac{\Sigma\mathfrak{P}_{n+a}}{\mathfrak{P}_{n}} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{m+a}\,.\,P_{n+a})}{\mathfrak{P}_{m}\,.\,P_{n}}\right] \ldots\ldots (4).$$

Beispiel.

Eine 84= und eine 81 jährige Person haben eine um 4 Jahre aufgeschobene nachschüssige Verbindungsrente von 5000 Mk. auf das

*) Der Bezug der Leibrente findet also zum ersten Male am Ende des (a + 1)ten Jahres statt.

längste Leben zu beziehen; wie groß ist der baare Werth derselben bei 4prozentiger Zinsenberechnung?

Auflösung.

Nach obiger Gleichung (2) wird

$$ {}^{l}_{4}R_{84.81} = 5000\left[\frac{\Sigma\mathfrak{p}_{89}}{\mathfrak{p}_{84}} + \frac{\Sigma\mathfrak{p}_{86}}{\mathfrak{p}_{81}} - \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{89}\cdot P_{86})}{\mathfrak{p}_{84}\cdot P_{81}}\right]. $$

Nun ist aber

$$ {}_{4}\varrho_{84} = \frac{\Sigma\mathfrak{p}_{89}}{\mathfrak{p}_{84}} = \frac{0,8213720}{0,7417077} = 1,107409 $$

$$ {}_{4}\varrho_{81} = \frac{\Sigma\mathfrak{p}_{86}}{\mathfrak{p}_{81}} = \frac{2,0140302}{1,3349122} = 1,508701 $$

$$ {}^{k}\varrho_{84.81} = \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{89}\cdot P_{86})}{\mathfrak{p}_{84}\cdot P_{81}} = \frac{1}{P_{84}.P_{81}}(\mathfrak{p}_{89}.P_{86} + \mathfrak{p}_{90}.P_{87} + \mathfrak{p}_{91}.P_{88} + \mathfrak{p}_{92}.P_{89} + \mathfrak{p}_{93}.P_{90} + \mathfrak{p}_{94}.P_{91} + \mathfrak{p}_{95}.P_{92}) $$

$$ = \frac{1}{0,7417077.32}(0,2438519.14 + 0,1758548.12 + 0,1409093.10 + 0,1083918.8 + 0,0781671.6 + 0,0501071.5 + 0,0240900.4) $$

$$ = \frac{1}{23,7346464}(3,4139266 + 2,1102576 + 1,4090930 + 0,8671344 + 0,4690026 + 0,2505355 + 0,0963600) $$

$$ = \frac{8,6163097}{23,7346464} = 0,363026. $$

Man hat daher

$$ {}^{l}_{4}R_{84.81} = 5000(1,107409 + 1,508701 - 0,363026) $$
$$ = 5000.2,253084 = 11265,42 \text{ Mk.} $$

3) Mit dem Tode der einen Person beginnende Leibrente.

§. 58. Aufgabe.

Eine m- und eine njährige Person schließen mit einer Rentenanstalt einen Vertrag in der Weise, daß eine Rente r von der länger lebenden Person lebenslänglich vom Ende des Todesjahres der anderen Person an bezogen wird. Wie groß ist der baare Werth ${}^{t}R_{m,n}$ dieser Rente?

Auflösung.

Nehmen wir an, daß beide Personen die Verbindungsrente

r auf das längste Leben beziehen, so ist nach §. 56 der baare Werth dieser Verbindungsrente ausgedrückt durch r . $^{l}\varrho_{m,n}$. Derselbe wäre aber um den baaren Werth der Verbindungsrente r beider Personen auf das kürzeste Leben größer als der zu suchende Baarwerth. Bringt man daher solchen wieder in Abzug, so bleibt für den verlangten Baarwerth

$$^{\dagger}R_{m,n} = r(^{l}\varrho_{m,n} - {}^{k}\varrho_{m,n}) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

oder nach §. 56 (5):

$$^{\dagger}R_{m,n} = r(\varrho_m + \varrho_n - 2 . {}^{k}\varrho_{m,n}) \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

oder wenn man die betreffenden Werthe einführt:

$$^{\dagger}R_{m,n} = r\left[\frac{\Sigma \mathfrak{P}_{m+1}}{\mathfrak{P}_m} + \frac{\Sigma \mathfrak{P}_{n+1}}{\mathfrak{P}_n} - \frac{2 . \Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} . P_{n+1})}{\mathfrak{P}_m . P_n}\right] \ldots (3)$$

Zusatz.

Für r = 1 erhält man:

$$^{\dagger}\varrho_{m,n} = {}^{l}\varrho_{m,n} - {}^{k}\varrho_{m,n} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

$$= \varrho_m + \varrho_n - 2 . {}^{k}\varrho_{m,n} \; . \; . \; . \; . \; . \; (6).$$

Anmerkung. Man überzeugt sich leicht, daß $^{\dagger}\varrho_{m,n} = {}^{\dagger\prime}\varrho_{m,n}$.

Beispiel.

Von zwei Personen, welche gegenwärtig 88 und 85 Jahre alt sind, hat die eine von dem Ende des Todesjahres der anderen an lebenslänglich eine Rente von 1000 Mk. zu beziehen; wie groß ist der baare Werth dieser Rente, wenn bei der Berechnung 4 prozentige Zinsen in Anschlag gebracht werden?

Auflösung.

Nach Gleichung (2) wird der Baarwerth

$$^{\dagger}R_{88.85} = 1000(\varrho_{88} + \varrho_{85} - 2 . {}^{k}\varrho_{88.85}).$$

oder nach dem zweiten Beispiele zu §. 56:

$$^{\dagger}R_{88.85} = 1000(2{,}59102 + 3{,}32236 - 3{,}19728)$$

$$= 1000 . 2{,}7161 = 2716{,}1 \text{ Mk.}$$

§. 59. Aufgabe.

Eine m- und eine njährige Person schließen mit einer Rentenanstalt einen Vertrag in der Weise, daß eine Rente r von der länger lebenden Person lebenslänglich von dem Ende des Todesjahres der

anderen an bezogen wird. Wie groß ist die am Ende eines jeden Jahres zu machende Einlage ${}^{\dagger}R'_{m,n}$, wenn diese so lange erfolgt, als beide Personen zusammen leben?

Auflösung.

Der baare Werth aller bis zum Tode der zuerst sterbenden Person bezahlten Einlagen ist derselbe, wie der Baarwerth einer nachschüssigen Verbindungsrente, welche jährlich ${}^{\dagger}R_{m,n}$ beträgt, auf das kürzeste Leben, oder $= {}^{\dagger}R'_{m,n} \,.\, {}^{k}\varrho_{m,n}$.

Nach §. 58. ist ferner der Baarwerth der zu beziehenden Leibrente r durch ${}^{\dagger}R_{m,n}$ dargestellt und man erhält demnach die Gleichung

$${}^{\dagger}R'_{m,n} \,.\, {}^{k}\varrho_{m,n} = {}^{\dagger}R_{m,n}$$

und hieraus

$${}^{\dagger}R'_{m,n} = \frac{{}^{\dagger}R_{m,n}}{{}^{k}\varrho_{m,n}} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

oder auch nach §. 58 (2)

$${}^{\dagger}R'_{m,n} = r\left(\frac{\varrho_m + \varrho_n}{{}^{k}\varrho_{m,n}} - 2\right) \ldots\ldots\ldots (2)$$

oder wenn man die betreffenden Werthe einführt:

$${}^{\dagger}R'_{m,n} = r\left[\left(\frac{\Sigma \mathfrak{p}_{m+1}}{\mathfrak{p}_m} + \frac{\Sigma \mathfrak{p}_{n+1}}{\mathfrak{p}_n}\right)\frac{\mathfrak{p}_m \,.\, P_n}{\Sigma(\mathfrak{p}_{m+1} \,.\, P_{n+1})} - 2\right] \ldots (3).$$

Zusätze.

1) Erfolgen die Einlagen zu Anfang eines jeden Jahres, so erhält man für die jährliche Einlage

$${}^{\dagger\prime}R'_{m,n} = r\left(\frac{\varrho_m + \varrho_n}{{}^{k\prime}\varrho_{m,n}} - 2\right)$$

oder nach der in der Auflösung zu §. 58 gemachten Bemerkung auch

$${}^{\dagger\prime}R'_{m,n} = r\left(\frac{{}'\varrho_m + {}'\varrho_n - 2 \,.\, {}^{k\prime}\varrho_{m,n}}{{}^{k\prime}\varrho_{m,n}}\right)$$

$$= r\left(\frac{{}'\varrho_m + {}'\varrho_n}{{}^{k\prime}\varrho_{m,n}} - 2\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

2) Für r = 1 erhält man hieraus:

$${}^{\dagger}\varrho'_{m,n} = \frac{{}^{\dagger}\varrho_{m,n}}{{}^{k}\varrho_{m,n}} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$^{\dagger}\varrho'_{m,n} = \frac{\varrho_m + \varrho_n}{^{k}\varrho_{m,n}} - 2 \;\ldots\ldots\ldots\; (6)$$

$$^{\dagger\prime}\varrho'_{m,n} = \frac{'\varrho_m + '\varrho_n}{^{k\prime}\varrho_{m,n}} - 2 \;\ldots\ldots\ldots\; (7)$$

Beispiel.

Von zwei Personen, welche gegenwärtig 88 und 85 Jahre alt sind, hat die eine nach dem Tode der anderen eine lebenslängliche Rente von 4000 Mk. zu beziehen. Wie groß ist die am Ende eines jeden Jahres bis nach erfolgtem Ableben einer dieser Personen zu machende Einlage, wenn der Zinsfuß zu 4 % berechnet wird?

Auflösung.

Nach obiger Gleichung (2) wird

$$^{\dagger}R'_{88\,85} = 4000 \left[\frac{\varrho_{88} + \varrho_{85}}{\varrho_{88\,85}} - 2\right],$$

oder da nach dem zweiten Beispiele zu §. 56

$$\varrho_{88} = \frac{\Sigma \mathfrak{p}_{89}}{\mathfrak{p}_{88}} = 2{,}59102$$

$$\varrho_{85} = \frac{\Sigma \mathfrak{p}_{86}}{\mathfrak{p}_{85}} = 3{,}32236$$

$$^{k}\varrho_{88.85} = \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{89} \,.\, p_{86})}{\mathfrak{p}_{88} \,.\, p_{85}} = 1{,}59864,$$

so wird die Einlage

$$^{\dagger}R_{88.85} = 4000 \left[\frac{2{,}59102 + 3{,}32236}{1{,}59864} - 2\right]$$

$$= 4000\left(\frac{5{,}91338}{1{,}59864} - 2\right)$$

$$= 4000 \,.\, 1{,}699007 = 6796{,}028 \text{ Mk.}$$

Anmerkung. Wird die Einlage praenumerando geleistet, so erhält man nach (1)

$$^{\dagger\prime}R'_{88,85} = 4000 \left[\frac{3{,}59102 + 4{,}32236}{2{,}59864} - 2\right]$$

$$= 4000\left(\frac{7{,}91338}{2{,}59864} - 2\right)$$

$$= 4000 \,.\, 1{,}0452 = 4180{,}8 \text{ Mk.}$$

d) Ueberlebungsrenten.

1) Mit dem Tode beginnende Rente.

§. 60. Aufgabe.

Ein mjähriger Ehemann will von dem Ende seines

Todesjahres an seiner $n$jährigen Frau lebenslänglich eine Rente r (Wittwenpension) sichern. Wie groß ist die zu machende baare Einlage $R_{m+,n}$?

Auflösung.

Der verlangte Baarwerth ist offenbar gleich dem baaren Werthe einer von jetzt beginnenden Leibrente r der $n$jährigen Person (§. 48) weniger dem baaren Werthe einer Verbindungsrente r auf das kürzeste Leben für eine m- und eine $n$jährige Person (§. 52) in gleicher Weise bezogen.

Man hat daher

$$R_{m+,n} = R_n - {}^kR_{m,n}$$
$$= r(\varrho_n - {}^k\varrho_{m,n}) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Da nun

$${}'\varrho_n = \varrho_n + 1,$$
$${}^{k\prime}\varrho_{m,n} = {}^k\varrho_{m,n} + 1,$$

so ist

$${}'\varrho_n - {}^{k\prime}\varrho_{m,n} = \varrho_n - {}^k\varrho_{m,n}$$

und man kann demnach in Gleichung (1) statt der nachschüssigen auch vorschüssige Renten in Rechnung bringen, ohne dadurch den in Frage stehenden Baarwerth zu ändern.

Führt man in Gleichung (1) die betreffenden Werthe ein, so geht dieselbe über in:

$$R_{m+,n} = r\left[\frac{\Sigma \mathfrak{P}_{n+1}}{\mathfrak{P}_n} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{m+1} . P_{n+1})}{\mathfrak{P}_m . P_n}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$= r\left[\frac{\Sigma \mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_n} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_m . P_n)}{\mathfrak{P}_m . P_n}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Zusatz.

Für $r = 1$ folgt aus Gleichung (1)

$$\varrho_{m+,n} = \varrho_n - {}^k\varrho_{m,n} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Beispiele.

Ein 88jähriger Ehemann sichert seiner 85jährigen Frau eine Wittwenpension von jährlich 1000 Mk.; wie groß ist die baar einzulegende Summe zur Erwerbung dieser Pension, wenn 4prozentige Zinsen berechnet werden?

Auflösung.

Nach Gleichung (1) wird

$$R_{88+,85} = 1000(\varrho_{85} - {}^k\varrho_{88,85}).$$

Nun ist aber nach dem zweiten Beispiele zu §. 56

$$\varrho_{85} = \frac{\Sigma \mathfrak{p}_{86}}{\mathfrak{p}_{85}} = 3{,}32236$$

$$^{k}\varrho_{88.85} = \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{89} \cdot P_{86})}{\mathfrak{p}_{88} \cdot P_{85}} = 1{,}59864,$$

also

$$R_{88\dagger,85} = 1000\,(3{,}32236 - 1{,}59864)$$
$$= 1000 . 1{,}72372 = 1723{,}72 \text{ Mk.}$$

§. 61. Aufgabe.

Eine mjährige Person will von dem Ende ihres Todesjahres an einer njährigen eine Leibrente r sichern. Wie groß ist die am Ende eines jeden Jahres an die Anstalt zu machende Einlage $R'_{m\dagger,n}$?

Auflösung.

Der baare Werth aller bis zum Tode der zuerst sterbenden Person bezahlten Einlagen ist derselbe, als der Baarwerth einer nachschüssigen Verbindungsrente, welche jährlich $R'_{m\dagger,n}$ beträgt, auf das kürzeste Leben. Diese ist aber

$$R'_{m\dagger,n} . {}^{k}\varrho_{m,n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Nach §. 60 ist ferner der baare Werth der zu beziehenden Ueberlebungsrente ausgedrückt durch

$$R_{m\dagger,n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

und man erhält daher durch Gleichsetzung der Ausdrücke (1) und (2) die Gleichung

$$R'_{m\dagger,n} . {}^{k}\varrho_{m,n} = R_{m\dagger,n}$$

und hieraus für den verlangten Baarwerth:

$$R'_{m\dagger,n} = \frac{R_{m\dagger,n}}{{}^{k}\varrho_{m,n}} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

oder nach §. 60 (1):

$$R'_{m\dagger,n} = r\left(\frac{\varrho_n}{{}^{k}\varrho_{m,n}} - 1\right) \ldots\ldots (4)$$

oder

$$R'_{m\dagger,n} = r\left(\frac{\dfrac{\Sigma \mathfrak{p}_{n+1}}{\mathfrak{p}_n}}{\dfrac{\Sigma(\mathfrak{p}_{m+1} . P_{n+1})}{\mathfrak{p}_m . P_n}} - 1\right) \ldots\ldots (5)$$

$$= r\left[\frac{\mathfrak{p}_m . P_n . \Sigma \mathfrak{p}_{n+1}}{\mathfrak{p}_n . \Sigma(\mathfrak{p}_{m+1} . P_{n+1})} - 1\right] \ldots\ldots (6).$$

Zusätze.

1) Für den Fall, daß die Einlagen praenumerando zu geschehen haben, folgt

$$'R'_{m+,n} = r\left[\frac{'\varrho_n}{^{k'}\varrho_{m\,n}} - 1\right] \dots\dots\dots\dots (7)$$

$$= r\left(\frac{\dfrac{\Sigma \mathfrak{p}_n}{\mathfrak{p}_n}}{\dfrac{\Sigma(\mathfrak{p}_m \,.\, P_n)}{\mathfrak{p}_m \,.\, P_n}} - 1\right) \dots\dots (8)$$

$$= r\left[\frac{\mathfrak{p}_m \,.\, P_n \,.\, \Sigma \mathfrak{p}_n}{\mathfrak{p}_n \,.\, \Sigma(\mathfrak{p}_m \,.\, P_n)} - 1\right] \dots\dots\dots (9)$$

2) Für $r = 1$ gehen die Gleichungen (4) und (7) über in

$$\varrho'_{m+,n} = \frac{\varrho_n}{^k\varrho_{m,n}} - 1 \dots\dots\dots (10)$$

$$'\varrho'_{m+,n} = \frac{'\varrho_n}{^{k'}\varrho_{m,n}} - 1 \dots\dots\dots (11).$$

Beispiel.

Ein 88 jähriger Ehemann sichert seiner 85 jährigen Frau von seinem Tode an eine Jahresrente von 1500 Mk.; wie viel hat derselbe am Ende eines jeden Jahres bis dahin in eine Rentenanstalt einzulegen, wenn diese 4 prozentige Zinsen berechnet?

Auflösung.

Nach obiger Gleichung (4) ist die jährliche Einlage

$$R'_{88^+,85} = 1500\left(\frac{\varrho_{85}}{^k\varrho_{88.85}} - 1\right)$$

oder da

$$\varrho_{85} = \frac{\Sigma \mathfrak{p}_{86}}{\mathfrak{p}_{85}} = 3{,}32236$$

$$^k\varrho_{88.85} = \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{89} \,.\, P_{86})}{\mathfrak{p}_{88} \,.\, P_{85}} = 1{,}59864,$$

auch:

$$R'_{88^+,85} = 1500\left(\frac{3{,}32236}{1{,}59864} - 1\right)$$

$$= 1500 \,.\, 1{,}07824 = 1617{,}36 \text{ Mk.}$$

Anmerkung. Wird die Einlage praenumerando berechnet, so folgt

$$'R'_{88^+,85} = 1500\left[\frac{'\varrho_{85} - {}^k.\,\varrho_{88.85}}{^{k'}\varrho_{88.85}}\right] = \frac{1500 \,.\, 1{,}72372}{2{,}59864} = 994{,}97 \text{ Mk.}$$

2) Aufgeschobene Ueberlebungsrente.

§. 62. Aufgabe.

Ein mjähriger Ehemann sichert seiner njährigen Frau eine Pension in der Weise, daß deren Bezug das erste Mal a Jahre nach seinem Tode erfolgt. Wie groß ist der baare Werth $_aR_{m+,n}$ dieser aufgeschobenen Ueberlebungsrente?

Auflösung.

Nehmen wir an, daß gleichzeitig $P_m . P_n$ Ehepaare einen solchen Vertrag abschließen, so sterben im ersten Jahre von P_m Männern $(P_m - P_{m+1})$, also von $P_m . P_n$ Männern

$$(P_m - P_{m+1}) P_n.$$

Ebenso groß wäre natürlich auch die Anzahl der Wittwen nach dem ersten Jahre, wenn nicht auch Frauen gestorben wären. Da nun aber von P_n Frauen nach einem Jahre nur noch P_{n+1} leben, so ist die Anzahl der nach dem ersten Jahre lebenden Wittwen

$$= (P_m - P_{m+1}) P_{n+1}.$$

Von diesen leben aber a Jahre später nur noch

$$(P_m - P_{m+1}) P_{n+a+1}$$

Wittwen, welche also die erste Rente beziehen.

Ein Jahr später gelangen aber auch die durch das Absterben der Männer im zweiten Jahre zu Wittwen gewordenen Frauen, deren es am Ende des zweiten Jahres

$$(P_{m+1} - P_{m+2}) P_{n+2},$$

also nach a Jahren

$$(P_{m+1} - P_{m+2}) P_{n+a+2}$$

sind, in den Bezug der Rente, und da von den

$$(P_m - P_{m+1}) P_{n+a+1}$$

Wittwen, welche die Rente zum ersten Male bezogen haben, ein Jahr später nur noch

$$(P_m - P_{m+1}) P_{n+a+2}$$

am Leben sind, so hat die Bank nach $(a+2)$ Jahren, von jetzt an gerechnet, an

$$(P_m - P_{m+1}) P_{n+a+2} + (P_{m+1} - P_{m+2}) P_{n+a+2}$$
$$= (P_m - P_{m+2}) P_{n+a+2}$$

Wittwen Pensionen auszuzahlen.

Ganz analog findet man, daß am Ende des

(a + 3) ten, (a + 4) ten

Jahres noch

$(P_m - P_{m+3}) P_{n+a+3}$, $(P_m - P_{m+4}) P_{n+a+4}$, ...

Wittwen leben.

Der baare Werth der Ausgaben der Rentenanstalt ist somit

$$= r\left[\frac{(P_m - P_{m+1})P_{n+a+1}}{1{,}0p^{a+1}} + \frac{(P_m - P_{m+2})P_{n+a+2}}{1{,}0p^{a+2}} + \ldots\ldots\right]$$

$$= r\left[P_m\left(\frac{P_{n+a+1}}{1{,}0p^{a+1}} + \frac{P_{n+a+2}}{1{,}0p^{a+2}} + \frac{P_{n+a+3}}{1{,}0p^{a+3}} + \ldots\right) - \left(\frac{P_{m+1} . P_{n+a+1}}{1{,}0p^{a+1}} + \frac{P_{m+2} . P_{n+a+2}}{1{,}0p^{a+2}} + \frac{P_{m+3} . P_{n+a+3}}{1{,}0p^{a+3}} + \ldots\right)\right]$$

$$= r . 1{,}0p^n\left[P_m\left(\frac{P_{n+a+1}}{1{,}0p^{n+a+1}} + \frac{P_{n+a+2}}{1{,}0p^{n+a+2}} + \frac{P_{n+a+3}}{1{,}0p^{n+a+3}} + \ldots\right) - \left(\frac{P_{m+1} . P_{n+a+1}}{1{,}0p^{n+a+1}} + \frac{P_{m+2} . P_{n+a+2}}{1{,}0p^{n+a+2}} + \frac{P_{m+3} . P_{n+a+3}}{1{,}0p^{n+a+3}} + \ldots\right)\right]$$

$$= r . 1{,}0p^n[P_m(\mathfrak{P}_{n+a+1} + \mathfrak{P}_{n+a+2} + \mathfrak{P}_{n+a+3} + \ldots) - (P_{m+1} . \mathfrak{P}_{n+a+1} + P_{m+2} . \mathfrak{P}_{n+a+2} + P_{m+3} . \mathfrak{P}_{n+a+3} + \ldots)]$$

$$= r . 1{,}0p^n . [P_m \Sigma\mathfrak{P}_{n+a+1} - \Sigma(P_{m+1} . \mathfrak{P}_{n+a+1})] \;\ldots\ldots\; (1)$$

Die **Einnahme** der Anstalt ist dagegen

$$= P_m . P_n . {}_aR_{m\dagger,n} \;\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

und man erhält demnach aus (1) und (2) die Gleichung

$$P_m . P_n . {}_aR_{m\dagger,n} = r . 1{,}0p^n[P_m \Sigma\mathfrak{P}_{n+a+1} - \Sigma(P_{m+1} . \mathfrak{P}_{n+a+1})]$$

und hieraus den verlangten Baarwerth

$${}_aR_{m\dagger,n} = \frac{r . 1{,}0p^n}{P_m . P_n}[P_m \Sigma\mathfrak{P}_{n+a+1} - \Sigma(P_{m+1} . \mathfrak{P}_{n+a+1})]$$

oder

$${}_aR_{m\dagger,n} = r\left[\frac{\Sigma\mathfrak{P}_{n+a+1}}{\mathfrak{P}_n} - \frac{\Sigma(P_{m+1} . \mathfrak{P}_{n+a+1})}{P_m . \mathfrak{P}_n}\right] \ldots (3).$$

Schreibt man dafür

$${}_aR_{m\dagger,n} = \frac{\mathfrak{P}_{n+a}}{\mathfrak{P}_n} . r\left[\frac{\Sigma\mathfrak{P}_{n+a+1}}{\mathfrak{P}_{n+a}} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{n+a+1} . P_{m+1})}{\mathfrak{P}_{n+a} . P_m}\right],$$

oder nach §. 48. (5) und §. 52 (5)

$${}_aR_{m\dagger,n} = \frac{\mathfrak{P}_{n+a}}{\mathfrak{P}_n} . r(\varrho_{n+a} - {}^k\varrho_{n+a,m}) \;\ldots\ldots\; (4)$$

so ergibt sich durch Vergleichung dieses Werthes mit der Gleichung (1) des §. 60, daß man statt obiger Gleichung (3) auch setzen kann:

$${}_aR_{m\dagger,n} = \frac{\mathfrak{P}_{n+a}}{\mathfrak{P}_n} . R_{m\dagger,(n+a)} \;\ldots\ldots\ldots\; (5)$$

d. h. der Baarwerth wird gefunden, wenn man den Quotienten $\frac{\mathfrak{p}_{n+a}}{\mathfrak{p}_n}$ mit dem Baarwerthe der Ueberlebungsrente, welche eine mjährige Person einer (n+a)jährigen sichert, multiplicirt.

Zusätze.

1) Für r = 1 folgt aus (4) und (5):

$$_a\varrho_{m\dagger,n} = \frac{\mathfrak{p}_{n+a}}{\mathfrak{p}_n}(\varrho_{n+a} - {}^k\varrho_{(n+a),m}) \ldots\ldots (6)$$

$$= \frac{\mathfrak{p}_{n+a}}{\mathfrak{p}_n}\cdot\varrho_{m\dagger,(n+a)} \ldots\ldots (7)$$

2) Soll die Versicherung durch eine praenumerando zahlbare Prämie erworben werden und ist diese so lange zu entrichten, als beide Personen zusammen leben, so findet man dafür

$$_aR_{m\dagger,n} = \frac{_aR_{m\dagger,n}}{^k\varrho_{m,n}} \ldots\ldots (8)$$

Beispiel.

Ein 85jähriger Ehemann sichert seiner 78jährigen Frau eine Pension von 2000 Mk., deren Bezug jedoch zum ersten Male erst 10 Jahre nach seinem Tode erfolgt. Wie groß ist der baare Werth dieser Pension bei Annahme eines 4prozentigen Zinsfußes?

Auflösung.

Nach Gleichung (4) wird

$$_{10}R_{85\dagger,78} = 2000.\frac{\mathfrak{p}_{88}}{\mathfrak{p}_{78}}(\varrho_{88} - {}^k\varrho_{88,85}),$$

oder da

$$\mathfrak{p}_{88} = 0{,}3170075,\ \mathfrak{p}_{78} = 2{,}2993164$$

$$\varrho_{88} - {}^k\varrho_{88,85} = 2{,}59102 - 1{,}59864 = 0{,}99238,$$

so ist

$$_{10}R_{85\dagger,78} = \frac{2000.0{,}3170075.0{,}99238}{2{,}2993164}$$

$$= 273{,}6395 \text{ Mk.}$$

3) Temporäre Ueberlebungsrente.

§. 63. Aufgabe.

Eine mjährige Person sichert nach ihrem Tode einer njährigen den t maligen Bezug einer Ueberlebungsrente r. Wie groß ist der baare Werth $_{(t)}R_{m\dagger,n}$ derselben?

Auflösung.

Nehmen wir an, die njährige Person beziehe die Ueberlebungsrente r lebenslänglich, so wäre nach §. 60 der Baarwerth derselben dargestellt durch

$$R_{m\dagger,n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Da nun aber hierin der Baarwerth

$$_{t}R_{m\dagger,n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

einer um t Jahre aufgeschobenen Ueberlebungsrente zu viel enthalten ist, so folgt aus (1) und (2) für den in Frage stehenden Baarwerth

$$_{(t)}R_{m\dagger,n} = R_{m\dagger,n} - {}_{t}R_{m\dagger,n}$$
$$= r(\varrho_{m\dagger,n} - {}_{t}\varrho_{m\dagger,n}) \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Führt man aus §. 60 (4) und §. 62 (7) die betreffenden Werthe ein, so geht vorstehende Gleichung (3) über in

$$_{(t)}R_{m\dagger,n} = r\left[\varrho_n - {}^{k}\varrho_{m,n} - \frac{\mathfrak{p}_{n+t}}{\mathfrak{p}_n} \cdot \varrho_{m\dagger,(n+t)}\right] \ldots\ldots \quad (4),$$

oder nach §. 62 (6)

$$= r\left[\varrho_n - {}^{k}\varrho_{m\,n} - \frac{\mathfrak{p}_{n+t}}{\mathfrak{p}_n}(\varrho_{n+t} - {}^{k}\varrho_{m,n+t})\right] (5).$$

Zusatz.

Für die während der Zeit des Zusammenlebens beider Personen praenumerando zu entrichtende Prämie folgt:

$$_{(t)}R'_{m\dagger,n} = \frac{_{(t)}R_{m\dagger,n}}{^{k}\varrho_{m,n}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Beispiel.

Ein 88jähriger Ehemann sichert seiner 85jährigen Frau auf 3 Jahre eine Ueberlebungsrente von 5000 Mk. Wie groß ist der baare Werth derselben bei 4prozentiger Zinsenberechnung?

Auflösung.

Nach obiger Gleichung (5) und §. 62 (4) folgt:

$$ {}_{(3)}R_{88\dagger.85} = 5000\left[\varrho_{85} - {}^{k}\varrho_{88.85} - \frac{\mathfrak{P}_{88}}{\mathfrak{P}_{85}}(\varrho_{88} - {}^{k}\varrho_{88.85})\right]. $$

Nun ist aber

$$ \varrho_{85} = 3{,}32236 $$

$$ {}^{k}\varrho_{88.85} = 1{,}59864 $$

$$ \frac{\mathfrak{P}_{88}}{\mathfrak{P}_{85}} = \frac{0{,}3170075}{0{,}6062034} = 0{,}522939 $$

$$ \varrho_{88} = 2{,}59102 $$

$$ \varrho_{88.85} = \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{89}\cdot P_{86})}{\mathfrak{P}_{88}\cdot P_{85}} = \frac{1}{0{,}3170075.10}(0{,}2438519.8 + 0{,}1758548.6 + 0{,}1409093.5 + 0{,}1083918.4 + 0{,}0781671.3 + 0{,}0501071.2 + 0{,}0240900.1) $$

$$ = \frac{1}{3{,}170075}(1{,}9508152 + 1{,}0551288 + 0{,}7045465 + 0{,}4335672 + 0{,}2345013 + 0{,}1002142 + 0{,}0240900) $$

$$ = \frac{4{,}5028632}{3{,}170075} = 1{,}420428, $$

folglich wird

$$ {}_{(3)}R_{88\dagger.85} = 5000\,[3{,}32236 - 1{,}59864 - 0{,}522939\,(2{,}59102 - 1{,}420428)] $$

$$ = 5000\,(1{,}72372 - 0{,}522939.1{,}170592) $$

$$ = 5000\,(1{,}72372 - 0{,}612148) $$

$$ = 5000.1{,}111572 = 5557{,}86 \text{ Mk.} $$

4) Besondere Fälle von Verbindungsrenten für drei Personen.

§. 64. Aufgabe.

Drei Personen A, B und C, welche bezüglich m, n und q Jahre alt sind, beziehen eine nachschüssige Rente r, welche mit dem Tode des C, oder auch nachdem die beiden Personen A und B gestorben sind, aufhört. Wie groß ist der baare Werth $R_{\left\{\substack{(m,n),q\dagger \\ (m,n)\dagger,q}\right\}}$ dieser Rente?

Auflösung.

Nehmen wir an, es beziehe sowohl A und C, als auch B und C eine Verbindungsrente r auf das kürzeste Leben, so wäre die Summe der Baarwerthe beider Renten

$$= {}^kR_{m,q} + {}^kR_{n,q}.$$

Hierin ist aber der baare Werth ${}^kR_{m,n,q}$ der Verbindungsrente der drei Personen auf das kürzeste Leben doppelt enthalten. Bringt man daher einen solchen wieder in Abzug, so bleibt für den fraglichen Baarwerth

$$R_{\left\{\begin{smallmatrix}(m,n),q^\dagger\\(m,n)^\dagger,q\end{smallmatrix}\right\}} = {}^kR_{m,q} + {}^kR_{n,q} - {}^kR_{m,n,q}$$

$$= r({}^k\varrho_{m,q} + {}^k\varrho_{n,q} - {}^k\varrho_{m,n,q}) \dots\dots\dots (1)$$

$$= r\left[\frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{m+1}.P_{q+1})}{\mathfrak{p}_m.P_q} + \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{n+1}.P_{q+1})}{\mathfrak{p}_n.P_q} - \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{m+1}.P_{n+1}.P_{q+1})}{\mathfrak{p}_m.P_n.P_q}\right] \dots\dots\dots (2)$$

Zusätze.

1) Ist die Rente eine vorschüssige, so folgt:

$${}'R_{\left\{\begin{smallmatrix}(m,n),q^\dagger\\(m,n)^\dagger,q\end{smallmatrix}\right\}} = r({}^{k\prime}\varrho_{m,q} + {}^{k\prime}\varrho_{n,q} - {}^{k\prime}\varrho_{m,n,q}) \dots\dots\dots (3)$$

$$= r\left[\frac{\Sigma(\mathfrak{p}_m.P_q)}{\mathfrak{p}_m.P_q} + \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_n.P_q)}{\mathfrak{p}_n.P_q} - \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_m.P_n.P_q)}{\mathfrak{p}_m.P_n.P_q}\right] \dots (4)$$

$$= r({}^k\varrho_{m,q} + {}^k\varrho_{n,q} - {}^k\varrho_{m,n,q} + 1) \dots\dots\dots (5)$$

2) Für den Fall, daß der Rentenbezug erst mit dem Tode des C beginnt und so lange dauert, als eine der beiden Personen A und B noch am Leben ist, wird der baare Werth gefunden, wenn man von dem baaren Werthe einer sogleich beginnenden Verbindungsrente der zwei Personen A und B auf das längste Leben den baaren Werth einer Verbindungsrente für A, B und C, welche mit dem Tode des C oder der beiden Personen A und B aufhört, subtrahirt.

Da nun nach §. 56 jener durch

$${}'R_{m,n},$$

dieser nach Obigem durch

$$R_{\left\{\begin{smallmatrix}(m,n),q^\dagger\\(m,n)^\dagger,q\end{smallmatrix}\right\}}$$

bezeichnet ist, so folgt für den in Frage stehenden Baarwerth

$${}'R_{(m,n),q^\dagger} = {}'R_{m,n} - R_{\left\{\begin{smallmatrix}(m,n),q^\dagger\\(m,n)^\dagger,q\end{smallmatrix}\right\}} \dots\dots\dots (6)$$

oder, wenn man die betreffenden Werthe einführt:

$${}'R_{(m,n),q^\dagger} = R_m + R_n - {}^kR_{m,n} - ({}^kR_{m,q} + {}^kR_{n,q} - {}^kR_{m,n,q})$$

$$= r(\varrho_m + \varrho_n - {}^k\varrho_{m,n} - {}^k\varrho_{m,q} - {}^k\varrho_{n,q} + {}^k\varrho_{m,n,q}) \dots (7).$$

3) Um in vorstehendem Falle die bis zum Tode des C zahlbare **Prämie** zu finden, hat man offenbar mit dem Baarwerthe $R_{\left\{\substack{(m,n),q^\dagger \\ (m,n)^\dagger,q}\right\}}$ in den Baarwerth $^{l}R_{(m,n),q^\dagger}$ zu dividiren.

Beispiel.

Drei Personen, welche gegenwärtig 91, 88 und 85 Jahre alt sind, beziehen eine nachschüssige Rente von 6000 Mk., die mit dem Tode der 85jährigen, oder auch, nachdem die beiden anderen gestorben sind, aufhört. Wie groß ist der baare Werth dieser Rente bei 4 prozentigem Zinsenansatz?

Auflösung.

Nach Gleichung (1) ist der Baarwerth

$$R_{\left\{\substack{(91,88),85^\dagger \\ (91,88)^\dagger,85}\right\}} = 6000({}^{k}\varrho_{91.85} + {}^{k}\varrho_{88.85} - {}^{k}\varrho_{91.88.85}).$$

Nun wird aber nach dem dritten Beispiele zu §. 52

$$ {}^{k}\varrho_{91.85} = 1{,}31469$$
$$ {}^{k}\varrho_{88.85} = 1{,}59864$$
$$ {}^{k}\varrho_{91.88.85} = 0{,}8785,$$

folglich

$$R_{\left\{\substack{(91,88),85^\dagger \\ (91,88)^\dagger,85}\right\}} = 6000(1{,}31469 + 1{,}59864 - 0{,}8785)$$
$$= 6000.2{,}03483 = 12208{,}98 \text{ Mk.}$$

Beginnt der Bezug erst mit dem Tode der 85jährigen Person und dauert derselbe bis zur zuletzt sterbenden der Personen A und B, so folgt nach (7) durch Einführung der betreffenden Werthe:

$$ {}^{l}R_{(91,88),85^\dagger} = 6000(\varrho_{91} + \varrho_{88} - {}^{k}\varrho_{91.88} - {}^{k}{}_{91.85} - {}^{k}\varrho_{88.85} + {}^{k}\varrho_{91.88.85})$$
$$= 6000(1{,}85051 + 2{,}59102 - 1{,}194407 - 1{,}31469 - 1{,}59864 + 0{,}8785)$$
$$= 6000.1{,}212293 = 7273{,}758 \text{ Mk.}$$

5) **Waisenpension.**

§. 65. Aufgabe.

Die Aeltern, welche gegenwärtig m und n Jahre alt sind, sichern ihrem qjährigen Kinde eine nach ihrem Tode beziehbare lebenslängliche Rente r. Wie groß ist der baare Werth $R_{(m,n)^\dagger,q}$ dieser Waisenpension?

Auflösung.

Nehmen wir an, das Kind beziehe eine sofort beginnende lebenslängliche Rente r, so ist deren Baarwerth ausgedrückt durch R_q.

Hierin wäre aber der Baarwerth einer Rente r, welche mit dem Tode des Kindes oder auch mit dem Aussterben der beiden Aeltern endigt, zu viel enthalten. Bringt man diesen daher nach §. 64 (1) in Abzug, so erhält man für den verlangten Baarwerth

$$\begin{aligned} R_{(m,n)^{\dagger},q} &= R_q - ({}^kR_{m,q} + {}^kR_{n,q} - {}^kR_{m,n,q}) \\ &= r(\varrho_q - {}^k\varrho_{m,q} - {}^k\varrho_{n,q} + {}^k\varrho_{m,n,q}) \ldots\ldots (1) \\ &= r({}'\varrho_q - {}^{k'}\varrho_{m,q} - {}^{k'}\varrho_{n,q} + {}^{k'}\varrho_{m,n,q}) \ldots\ldots (2), \end{aligned}$$

oder wenn man die betreffenden Werthe einführt:

$$\begin{aligned} R_{(m,n)^{\dagger},q} = r\Big[&\frac{\Sigma\mathfrak{P}_{q+1}}{\mathfrak{P}_q} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{m+1}\,.\,P_{q+1})}{\mathfrak{P}_m\,.\,P_q} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{n+1}\,.\,P_{q+1})}{\mathfrak{P}_n\,.\,P_q} \\ &+ \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{m+1}\,.\,P_{n+1}\,.\,P_{q+1})}{\mathfrak{P}_m\,.\,P_n\,.\,P_q}\Big] \ldots\ldots (3) \\ = r\Big[&\frac{\Sigma\mathfrak{P}_q}{\mathfrak{P}_q} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_m\,.\,P_q)}{\mathfrak{P}_m\,.\,P_q} - \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_n\,.\,P_q)}{\mathfrak{P}_n\,.\,P_q} + \\ &\frac{\Sigma(\mathfrak{P}_m\,.\,P_n\,.\,P_q)}{\mathfrak{P}_m\,.\,P_n\,.\,P_q}\Big] \ldots\ldots\ldots\ldots (4). \end{aligned}$$

Zusatz.

Sichert der Vater allein seinem Kinde eine lebenslängliche Pension r, so wird der Baarwerth auf dieselbe Weise berechnet wie der einer Wittwenpension (§. 60). Man erhält dafür

$$\left.\begin{aligned} R_{m^{\dagger},q} &= R_q - {}^kR_{m,q} \\ &= r(\varrho_q - {}^k\varrho_{m,q}) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (5).$$

Soll das Kind nur während t Jahre im Genusse der Pension bleiben, so hat man, um den Baarwerth zu finden, in der Gleichung (5) für beide Werthe der rechten Seite die betreffenden temporären Leibrenten auf t Jahre einzuführen. Nach §. 50 wird alsdann:

$$\left.\begin{aligned} {}_{(t)}R_{m^{\dagger},q} &= R_q - {}_tR_q - ({}^kR_{m,q} - {}^k_tR_{m,q}) \\ &= r(\varrho_q - {}_t\varrho_q - {}^k\varrho_{m,q} + {}^k\varrho_{m,q}) \end{aligned}\right\} \ldots.(6).$$

Beispiel.

Zwei Personen, welche gegenwärtig 91 und 88 Jahre alt sind, sichern nach ihrem Tode einer dritten, 85jährigen Person eine

lebenslängliche Rente von 4000 Mk.; wie groß ist der baare Werth derselben, wenn der Zinsfuß zu 4 % berechnet wird?

Auflösung.

Nach obiger Gleichung (1) folgt

$$R_{(91,88)+,85} = \varrho_{85} - {}^k\varrho_{91.85} - {}^k\varrho_{88.85} + {}^k\varrho_{91.88.85}.$$

Nun ist aber

$$\varrho_{85} = \frac{\Sigma \mathfrak{P}_{86}}{\mathfrak{P}_{85}} = 3{,}32236$$

$${}^k\varrho_{91.85} = \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{92} \cdot P_{86})}{\mathfrak{P}_{91} \cdot P_{85}} = 1{,}31469$$

$${}^k\varrho_{88.85} = \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{89} \cdot P_{86})}{\mathfrak{P}_{88} \cdot P_{85}} = 1{,}59864$$

$${}^k\varrho_{91.88/85} = \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{92} \cdot P_{89} \cdot P_{86})}{\mathfrak{P}_{91} \cdot P_{88} \cdot P_{85}} = 0{,}8785$$

folglich

$$R_{(91,88)+,85} = 4000(3{,}32236 - 1{,}31469 - 1{,}59864 + 0{,}8785)$$
$$= 4000 . 1{,}28753 = 5150{,}12 \text{ Mk.}$$

§. 66. Aufgaben zur Uebung.

1) Eine 30jährige Person will sich eine am Ende eines jeden Jahres zahlbare Leibrente von 2000 Mk. erwerben. Welche Kapitaleinlage hat dieselbe zu machen, wenn 4 % Zinsen berechnet werden?

2) Welche Mise hat eine 50jährige Person an eine Rentenanstalt zu entrichten, um sich eine unveränderliche nachschüssige Leibrente von 1000 Mk. zu erwerben, wenn der Berechnung ein 4prozentiger Zinsfuß zu Grunde gelegt wird?

3) Welche vorschüssige Leibrente kann sich eine 40jährige Person mit einer baaren Einlage von 12000 Mk. erwerben, wenn 3prozentige Zinsen in Rechnung gebracht werden?

4) Wie groß ist die Mise einer um 20 Jahre aufgeschobenen nachschüssigen Leibrente von 500 Mk. für eine 30jährige Person, wenn ein 4prozentiger Zinsfuß in Rechnung gebracht wird?

5) Mit welcher Summe kann sich eine 20jährige Person von ihrem 30ten Lebensjahre an eine vorschüssige Leibrente von 1500 Mk. erwerben bei 3prozentiger Zinsenberechnung?

6) Welche nachschüssige Leibrente kann sich eine 30jährige Person von ihrem 50ten Lebensjahre an mit einer baaren Einlage von 4067,5 Mk. erwerben bei Anrechnung 4prozentiger Zinsen?

7) Welche vorschüssige Leibrente kann sich eine 25jährige Person von ihrem 40ten Lebensjahre an mit einer baaren Einlage von 4000 Mk. erwerben, wenn die Anstalt 3 % berechnet?

8) Eine Person, welche jetzt 40 Jahre alt ist, will sich eine temporäre nachschüssige Leibrente von 2000 Mk. auf 10 Jahre erwerben. Wie groß ist deren baare Einlage, wenn 3prozentige Zinsen berechnet werden?

9) Welche baare Kapitaleinlage hat eine 50jährige Person in eine Rentenanstalt zu machen, um sich eine vorschüssige Leibrente von 1000 Mk. auf die nächsten 20 Jahre zu erwerben, wenn der Zinsfuß zu 4 % berechnet wird?

10) Eine 24jährige Person will sich von ihrem 30ten Jahre an auf 10 Jahre eine nachschüssige Leibrente von 3000 Mk. erwerben; welche baare Einlage hat dieselbe zu machen, wenn der Zinsfuß zu 4 % berechnet wird?

11) Eine 44jährige Person hat sich mit einer baaren Einlage von 1186,4875 Mk. eine mit ihrem 50ten Jahre beginnende vorschüssige Rente auf 12 Jahre erworben; wie groß ist diese Rente bei 3prozentigem Zinsenansatze?

12) Eine 35jährige Person will sich von ihrem 45ten Lebensjahre an eine Leibrente von 1000 Mk. erwerben; wie viel hat dieselbe von jetzt an am Ende eines jeden Jahres bis zu ihrem 45ten Jahre an die Rentenanstalt zu entrichten, wenn diese 4prozentige Zinsen in Anrechnung bringt?

13) Eine 36jährige Person hat sich mit einer jährlichen postnumerando zahlbaren Einlage von 1823 Mk. eine von ihrem 50ten Jahre an beziehbare nachschüssige Rente erworben; wie groß ist diese bei 4prozentigem Zinsfuße?

14) Eine 60jährige und eine 90jährige Person beziehen eine nachschüssige Verbindungsrente von 1800 Mk. auf das kürzeste Leben; wie groß ist der baare Werth derselben bei einem 4prozentigen Zinsfuße?

15) Drei Personen, von welchen die eine 70, die zweite 88 und die dritte 91 Jahre alt ist, beziehen eine nachschüssige Ver-

bindungsrente von 2000 Mk. auf das kürzeste Leben; wie groß ist deren baarer Werth bei Berechnung 3prozentiger Zinsen?

16) Drei Personen, welche gegenwärtig 60, 90 und 91 Jahre alt sind, beziehen so lange eine nachschüssige Verbindungsrente von 9000 Mk., als noch zwei derselben zusammen leben. Wie groß ist der baare Werth dieser Rente bei 4prozentigem Zinsenansatze?

17) Eine 80jährige und eine 87jährige Person wollen sich eine nach 4 Jahren beginnende Verbindungsrente von 10000 Mk. auf das kürzeste Leben erwerben; wie groß ist der baare Werth derselben bei Zugrundelegung eines 3prozentigen Zinsfußes?

18) Eine 90jährige und eine 93jährige Person sichern sich eine nachschüssige Verbindungsrente von 5000 Mk. auf das längste Leben; wie groß ist der baare Werth derselben, wenn 4prozentige Zinsen berechnet werden?

19) Eine 82- und eine 86jährige Person haben eine nach 5 Jahren beginnende nachschüssige Verbindungsrente von 2000 Mk. auf das längste Leben zu beziehen; wie groß ist der baare Werth derselben bei 4 % Zinsen?

20) Zwei Personen, von welchen die eine 87, die andere 90 Jahre alt ist, haben sich eine Leibrente von 2000 Mk. in der Weise erworben, daß die eine dieselbe vom Ende des Todesjahres der anderen an lebenslänglich bezieht; wie groß ist der baare Werth dieser Rente bei 4prozentigem Zinsfuße?

21) Von zwei Personen, welche gegenwärtig 79 und 80 Jahre alt sind, hat die eine vom Ende des Todesjahres der anderen an eine Rente von 3000 Mk. lebenslänglich zu beziehen; wie groß ist die am Ende eines jeden Jahres bis zum erfolgten Absterben der einen Person in die Rentenanstalt zu machende Einlage, wenn 3prozentige Zinsen in Rechnung gebracht werden?

22) Ein 90jähriger Mann sichert seiner 87jährigen Frau eine Wittwenpension von jährlich 2000 Mk.; welches ist der baare Werth dieser Pension bei 4prozentigem Zinsfuße?

23) Ein 90jähriger Mann will von dem Ende seines Todesjahres an seiner jetzt 79jährigen Frau eine Leibrente von 5000 Mk. sichern; wie groß ist die am Ende eines jeden Jahres an die Rentenanstalt zu machende Einlage bei Berechnung eines 3prozentigen Zinsfußes?

24) Ein 87jähriger Mann sichert seiner 86jährigen Frau eine Leibrente von 1000 Mk. in der Weise, daß deren Bezug das erste Mal 4 Jahre nach seinem Tode ausbezahlt werde; wie groß ist der baare Werth dieser Rente bei Berechnung 4prozentiger Zinsen?

25) Wie groß ist der baare Werth einer nachschüssigen Leibrente, wenn dieselbe anfänglich = r ist, in jedem der folgenden Jahre aber um d größer wird als im nächstvorhergehenden?

26) Wenn aber in vorhergehender Aufgabe die Rente jedes Jahr um d abnimmt, wie groß ist dann der baare Werth derselben?

27) Wie groß ist der baare Werth einer nachschüssigen Leibrente, wenn dieselbe anfänglich = r ist, in jedem folgenden Jahre aber q mal größer wird als im nächstvorhergehenden?

D. Von den Rechnungen bei Lebensversicherungen.

§. 67. Erklärungen.

Unter einer Lebensversicherungsanstalt versteht man eine Gesellschaft, welche gegen Entrichtung eines einmaligen oder jährlichen Beitrages (Prämie) die Verbindlichkeit übernimmt, ein bestimmtes Kapital nach dem Tode des Versicherten an eine andere Person auszuzahlen.

Die Jahresprämien werden in der Regel praenumerando bezahlt und bilden somit eine vorschüssige Jahresrente.

In allen Fällen nennt man die von der Anstalt dem Versicherten zugestellte Urkunde Police (Versicherungsschein).

In Bezug auf das von der Anstalt auszuzahlende Kapital kann die Lebensversicherung dreifacher Art sein, nämlich:

a) auf einzelnes Leben, wenn die Anstalt demjenigen, zu dessen Gunsten die Versicherung geschah, d. h. dem rechtmäßigen Besitzer der Police, das versicherte Kapital auszahlen muß, im Falle derjenige, welcher versichern läßt, innerhalb der festgesetzten Zeit stirbt.

b) auf verbundenes Leben, wenn zwei Personen sich in der Weise versichern, daß sie eine gemeinschaftliche Prämie zahlen und die Anstalt nach dem Tode der einen Person, der dieser überlebenden die versicherte Summe auszuzahlen hat.

Diese Versicherungsart kann natürlich in analoger Weise auch auf mehr als zwei Personen ausgedehnt werden.

c) auf Ueberlebung, wenn die Anstalt einer bestimmten von zwei Personen die versicherte Summe einzuhändigen hat, im Falle die andere vor ihr stirbt, im umgekehrten Falle aber nicht zur Zahlungsleistung verbunden ist.

Anmerkung. Die näheren Bedingungen sind stets aus den Statuten der betreffenden Anstalt zu ersehen.

a) Prämienberechnung für die Versicherung auf ein einzelnes Leben.

α) Versicherung auf den Todesfall ohne Bedingung.

§. 68. Aufgabe.

Eine mjährige Person will ihr Leben auf ein Kapital K, das nach ihrem Tode an die Erben ausbezahlt wird, versichern; welche baare Einlage L_m hat dieselbe der Versicherungsanstalt zu machen?

Auflösung.

Nehmen wir an, daß gleichzeitig P_m mjährige Personen einen solchen Vertrag mit der Anstalt abschließen, so ist die baare Einnahme derselben

$$= P_m \,.\, L_m \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \quad (1).$$

Da aber im

1ten, 2ten, 3ten, ... Jahre

$P_m - P_{m+1}$, $P_{m+1} - P_{m+2}$, $P_{m+2} - P_{m+3}$ ....

Personen sterben, so hat die Bank am Ende des

1ten, 2ten, 3ten, ...

Jahres der Reihe nach

$K(P_m - P_{m+1})$, $K(P_{m+1} - P_{m+2})$, $K(P_{m+2} - P_{m+3})$, ...

auszuzahlen.

Der baare Werth der Ausgaben ist somit:

$$= K\left(\frac{P_m - P_{m+1}}{1{,}0p} + \frac{P_{m+1} - P_{m+2}}{1{,}0p^2} + \frac{P_{m+2} - P_{m+3}}{1{,}0p^3} + \ldots\right)$$

$$= K \,.\, 1{,}0p^m\left(\frac{P_m - P_{m+1}}{1{,}0p^{m+1}} + \frac{P_{m+1} - P_{m+2}}{1{,}0p^{m+2}} + \frac{P_{m+2} - P_{m+3}}{1{,}0p^{m+3}} + \ldots\right)$$

$$= \mathrm{K}.1{,}0\mathrm{p}^{\mathrm{m}}\left[\left(\frac{\mathrm{P_m}}{1{,}0\mathrm{p}^{\mathrm{m}+1}} + \frac{\mathrm{P_{m+1}}}{1{,}0\mathrm{p}^{\mathrm{m}+2}} + \frac{\mathrm{P_{m+2}}}{1{,}0\mathrm{p}^{\mathrm{m}+3}} + \ldots\right) - \left(\frac{\mathrm{P_{m+1}}}{1{,}0\mathrm{p}^{\mathrm{m}+1}} + \frac{\mathrm{P_{m+2}}}{1{,}0\mathrm{p}^{\mathrm{m}+2}} + \frac{\mathrm{P_{m+3}}}{1{,}0\mathrm{p}^{\mathrm{m}+3}} + \ldots\right)\right]$$

$$= \mathrm{K}.1{,}0\mathrm{p}^{\mathrm{m}}\left[\left(\frac{\mathfrak{p}_{\mathrm{m}}}{1{,}0\mathrm{p}} + \frac{\mathfrak{p}_{\mathrm{m}+1}}{1{,}0\mathrm{p}} + \frac{\mathfrak{p}_{\mathrm{m}+2}}{1{,}0\mathrm{p}} + \ldots\right) - \left(\mathfrak{p}_{\mathrm{m}+1} + \mathfrak{p}_{\mathrm{m}+2} + \mathfrak{p}_{\mathrm{m}+3} + \ldots\right)\right] \ldots (\alpha)$$

$$= \mathrm{K}.1{,}0\mathrm{p}^{\mathrm{m}}\left[\frac{\Sigma\mathfrak{p}_{\mathrm{m}}}{1{,}0\mathrm{p}} - (\Sigma\mathfrak{p}_{\mathrm{m}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{m}})\right]$$

$$= \mathrm{K}.1{,}0\mathrm{p}^{\mathrm{m}}\left[\Sigma\mathfrak{p}_{\mathrm{m}}\left(\frac{1}{1{,}0\mathrm{p}} - 1\right) + \mathfrak{p}_{\mathrm{m}}\right]$$

$$= \mathrm{K}.1{,}0\mathrm{p}^{\mathrm{m}}\left[\mathfrak{p}_{\mathrm{m}} - \frac{0{,}0\mathrm{p}}{1{,}0\mathrm{p}}\,\Sigma\mathfrak{p}_{\mathrm{m}}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Aus der Gleichsetzung der Einnahmen (1) und der Ausgaben (2) ergibt sich:

$$\mathrm{L_m} = \frac{\mathrm{K}.1{,}0\mathrm{p}^{\mathrm{m}}}{\mathrm{P_m}}\left(\mathfrak{p}_{\mathrm{m}} - \frac{0{,}0\mathrm{p}}{1{,}0\mathrm{p}}\,\Sigma\mathfrak{p}_{\mathrm{m}}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{K}}{\dfrac{\mathrm{P_m}}{1{,}0\mathrm{p}^{\mathrm{m}}}}\left(\mathfrak{p}_{\mathrm{m}} - \frac{0{,}0\mathrm{p}}{1{,}0\mathrm{p}}\,\Sigma\mathfrak{p}_{\mathrm{m}}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{K}}{\mathfrak{p}_{\mathrm{m}}}\left(\mathfrak{p}_{\mathrm{m}} - \frac{0{,}0\mathrm{p}}{1{,}0\mathrm{p}}\,\Sigma\mathfrak{p}_{\mathrm{m}}\right)$$

$$= \mathrm{K}\left(1 - \frac{0{,}0\mathrm{p}}{1{,}0\mathrm{p}}\cdot\frac{\Sigma\mathfrak{p}_{\mathrm{m}}}{\mathfrak{p}_{\mathrm{m}}}\right) \ldots\ldots\ldots (3)$$

oder nach §. 48 (5) und (6):

$$\mathrm{L_m} = \mathrm{K}\left(1 - \frac{0{,}0\mathrm{p}}{1{,}0\mathrm{p}}\cdot{}'\varrho_{\mathrm{m}}\right) \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$= \mathrm{K}\left[1 - \frac{0{,}0\mathrm{p}}{1{,}0\mathrm{p}}(\varrho_{\mathrm{m}} + 1)\right] \ldots\ldots (5).$$

Anmerkung. Die Formeln (4) und (5) eignen sich besonders dann zur Berechnung des Baarwerthes der Versicherungssumme, wenn man im Besitze von Leibrententabellen ist.

Zusatz.

Bezeichnen wir in der Auflösung obiger Aufgabe die Differenzen

$$\mathrm{P_m - P_{m+1}},\ \mathrm{P_{m+1} - P_{m+2}},\ \mathrm{P_{m+2} - P_{m+3}},\ \ldots$$

der Reihe nach durch

$$\mathrm{D_{m+1}},\qquad \mathrm{D_{m+2}},\qquad \mathrm{D_{m+3}},\ \ldots$$

so wird die Ausgabe der Bank am Ende des

1ten, 2ten, 3ten, ...

Jahres

$D_{m+1}.K, \quad D_{m+2}.K, \quad D_{m+3}.K \ \ldots.$

also der baare Werth aller Ausgaben

$$= K\left(\frac{D_{m+1}}{1{,}0p} + \frac{D_{m+2}}{1{,}0p^2} + \frac{D_{m+3}}{1{,}0p^3} + \ldots\right)$$

$$= K.1{,}0p^m\left(\frac{D_{m+1}}{1{,}0p^{m+1}} + \frac{D_{m+2}}{1{,}0p^{m+2}} + \frac{D_{m+3}}{1{,}0p^{m+3}} + \ldots\right)$$

oder wenn man analog dem Früheren

$$\frac{D_m}{1{,}0p^m} = \mathfrak{D}_m$$

und

$$\mathfrak{D}_{m+1} + \mathfrak{D}_{m+2} + \mathfrak{D}_{m+3} + \ldots = \Sigma\mathfrak{D}_{m+1}$$

setzt:

$$= K.1{,}0p^m.\Sigma\mathfrak{D}_{m+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Wir erhalten somit die Gleichung

$$P_m.L_m = 1{,}0p^m.K.\Sigma\mathfrak{D}_{m+1}$$

und hieraus

$$L_m = \frac{1{,}0p^m.K.\Sigma\mathfrak{D}_{m+1}}{P_m}$$

$$= \frac{K.\Sigma\mathfrak{D}_{m+1}}{\mathfrak{P}_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Anmerkung. Sind einmal die Werthe von $\Sigma\mathfrak{D}_m$ für einen bestimmten Zinsfuß mit Zugrundelegung einer gewissen Sterblichkeitstabelle berechnet, so gewährt diese Gleichung den Vortheil sehr rascher Bestimmung des baaren Werthes einer Versicherungssumme.

Beispiel.

Welche baare Einlage hat eine 85 jährige Person in eine Lebensversicherungsanstalt zu machen, wenn sich dieselbe für lebenslänglich auf ein Kapital von 8000 Mk. versichern will und 4 prozentige Zinsen berechnet werden?

Auflösung.

Nach Gleichung (4) ist der Baarwerth

$$L_{85} = 8000\left(1 - \frac{0{,}04}{1{,}04}.'\varrho_{85}\right)$$

$$= 8000\left(1 - \frac{0{,}04}{1{,}04}.4{,}32236\right)$$

$$= 8000(1 - 0{,}1662447) = 6670{,}0424 \text{ Mk.}$$

§. 69. Aufgabe.

Eine mjährige Person will ihr Leben auf ein Kapital K versichern, das nach ihrem Tode an die Erben ausbezahlt wird. Welche Prämie L'_m hat dieselbe lebenslänglich praenumerando an die Anstalt zu leisten?

Auflösung.

Der baare Werth der Jahresprämien ist offenbar gleich dem Baarwerthe einer lebenslänglichen vorschüssigen Leibrente $= L'_m$ für eine mjährige Person, also

$$= L'_m \,.\, '\varrho_m \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Der baare Werth der Bankleistung ist aber nach §. 68 ausgedrückt durch

$$L_m \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Da nun die beiden Werthe (1) und (2) einander gleich sein müssen, so erhält man die Gleichung

$$L'_m \,.\, '\varrho_m = L_m$$

nnd hieraus die verlangte Prämie

$$L'_m = \frac{L_m}{'\varrho_m} = \frac{L_m}{\varrho_m + 1} \;\ldots\ldots\ldots (3),$$

d. h. **die jährliche Prämie zur Erwerbung eines nach dem Tode zahlbaren Kapitals wird erhalten, wenn man den baaren Werth dieser Versicherungssumme durch den Baarwerth der lebenslänglich zu beziehenden Renteneinheit dividirt.**

Durch Einführung des Werthes von L_m aus §. 68 (4) oder (5) geht vorstehende Gleichung (3) über in:

$$L'_m = K\left(\frac{1}{'\varrho_m} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$= K\left(\frac{1}{\varrho_m + 1} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\right) \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$= K\left(\frac{\mathfrak{P}_m}{\Sigma\mathfrak{P}_m} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\right) \ldots\ldots\ldots (6).$$

Zusätze.

1) Nach §. 68 (7) ist die Prämie auch ausgedrückt durch

$$L'_m = \frac{K}{'\varrho_m} \cdot \frac{\Sigma\mathfrak{D}_{m+1}}{\mathfrak{P}_m}$$

oder

$$L'_m = \frac{K \,.\, \Sigma\mathfrak{D}_{m+1}}{\Sigma\mathfrak{P}_m} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Anmerkung. Mittelst dieser Gleichung läßt sich, unabhängig von dem Baarwerthe der Leibrente, die Prämie rasch berechnen, sobald man im Besitze einer, sämmtliche Werthe von ΣD_m enthaltenden Tabelle ist.

2) Geschieht die Prämienzahlung nicht lebenslänglich, sondern nur während n Jahren, oder, im Falle der Versicherte innerhalb dieser Zeit sterben sollte, bis zu dessen Tode, so ist die Baarleistung an die Bank offenbar gleich dem baaren Werthe einer vorschüssigen temporären Leibrente, welche der Prämie gleichkommt auf n Jahre. Bezeichnen wir in diesem Falle die Prämie durch $L'^{(n)}_m$, so ist also die baare Einnahme der Bank $L'^{(n)}_m \cdot {}_{(n)}'\varrho_m$ und die baare Ausgabe derselben L_m.

Wir erhalten somit die Gleichung:

$$L'^{(n)}_m \cdot {}_{(n)}'\varrho_m = L_m$$

und hieraus die Prämie

$$L'^{(n)}_m = \frac{L_m}{{}_{(n)}'\varrho_m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

3) Wünscht eine Person, welche ihr Leben im mten Lebensalter mit einer Jahresprämie L'_m auf ein Kapital K versichert hat, nachdem a Jahre verflossen sind, aus irgend einem Grunde den Vertrag mit der Anstalt aufzulösen, so nennt man dieses: Rückkauf der Police.

Um in diesem Falle die Entschädigungssumme zu bestimmen, welche die austretende Person von Seiten der Versicherungsanstalt anzusprechen hat, wollen wir annehmen, die Person sei erst in ihrem (m+a)ten Lebensjahre der Anstalt beigetreten; alsdann hätte sie eine Jahresprämie $= L'_{m+a}$, somit $(L'_{m+a} - L'_m)$ mehr beizutragen gehabt. Nun hat sich dieselbe aber schon im mten Lebensjahre aufnehmen lassen und erlangt daher, da sie jetzt (m+a) Jahre alt ist, von da ab mit einem um $(L'_{m+a} - L'_m)$ kleineren Jahresbeitrage die nämlichen Ansprüche als eine Person, welche sich im (m+a)ten Lebensjahre versichern läßt. Sie darf deshalb bei ihrem Austritte eine Entschädigung ansprechen, welche gleich sein muß dem Baarwerthe einer Leibrente im jährlichen Betrage von $(L'_{m+a} - L'_m)$ für eine (m+a)jährige Person, also

entweder $\quad (L'_{m+a} - L'_m)\,\varrho_{m+a}$

oder $\quad (L'_{m+a} - L'_m)\,'\varrho_{m+a}$

je nachdem zur Zeit des Austritts eben erst die letzte Prämie entrichtet worden ist oder nicht.

Man kann nun auch leicht diese baare Rückvergütung in eine Leibrente umwandeln.

Beispiel.

Welche Prämie hat eine 85jährige Person praenumerando an eine Lebensversicherungsanstalt lebenslänglich jährlich zu entrichten, wenn dieselbe nach ihrem Tode ihren Erben ein Kapital von 8000 Mk. sichern will, bei einer 4prozentigen Zinsenberechnung?

Auflösung.

Nach dem Beispiele zu §. 68 ist der Baarwerth dieser Versicherung

$$L_{85} = 6670{,}0423 \text{ Mk.},$$

also wird nach Gleichung (3)

$$L'_{85} = \frac{L_{85}}{'\varrho_{85}} = \frac{6670{,}0423}{4{,}32236} = 1543{,}147 \text{ Mk.}$$

β) Aufgeschobene Lebensversicherung.

§. 70. Aufgabe.

Welche baare Einlage $_aL_m$ hat eine mjährige Person in eine Lebensversicherungsanstalt zu machen, um nach ihrem Tode den Erben ein Kapital K in dem Falle zu sichern, daß der Todesfall nicht im Laufe der ersten a Jahre eintritt?

Auflösung.

Nehmen wir an, die versicherte Person sei bei der Versicherung (m+a)-Jahre alt, die Versicherung habe also a Jahre später stattgefunden, so wäre nach §. 68 (4) der Baarwerth des nach ihrem Tode zu zahlenden Kapitals K

$$L_{m+a} = K\left[1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p} \cdot {'\varrho_{m+a}}\right]$$

und die Bank würde also von den im (m+a)ten Jahre noch lebenden P_{m+a} Personen die Summe

$$P_{m+a} \cdot K\left[1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p} \cdot {'\varrho_{m+a}}\right]$$

einnehmen, was auf jetzt, wo die Personen nur m Jahre alt sind, discontirt, den Werth

$$\frac{P_{m+a}}{1,0p^a}.K\left[1-\frac{0,0p}{1,0p}\cdot{}'\varrho_{m+a}\right]\ldots\ldots\ldots(1)$$

liefert.

Da aber gegenwärtig P_m Personen leben, also ebenso viel die Einlage zu machen haben, so ist die baare Einnahme auch

$$= P_m \,.\, {}_aL_m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Durch Gleichsetzung von (1) und (2) erhält man daher

$${}_aL_m = \frac{P_{m+a}}{P_m \,.\, 1,0p^a}.K\left[1-\frac{0,0p}{1,0p}.{}'\varrho_{m+a}\right]$$

oder

$${}_aL_m = \frac{\mathfrak{p}_{m+a}.K}{\mathfrak{p}_m}\left(1-\frac{0,0p}{1,0p}.{}'\varrho_{m+a}\right)\ldots\ldots(3),$$

$$= \frac{\mathfrak{p}_{m+a}.K}{\mathfrak{p}_m}\left[1-\frac{0,0p}{1,0p}(\varrho_{m+a}+1)\right]\ldots\ldots(4).$$

Vergleicht man die Gleichungen (3) und (4) mit den Gleichungen (4) und (5) des §. 68, so ergibt sich, daß man auch setzen kann:

$${}_aL_m = \frac{\mathfrak{p}_{m+a}}{\mathfrak{p}_m}.L_{m+a}\ldots\ldots\ldots\ldots(5),$$

d. h. der baare Werth einer um a Jahre aufgeschobenen Lebensversicherung wird erhalten, wenn man den Baarwerth der Versicherungssumme einer um a Jahre älteren Person mit dem Faktor $\frac{\mathfrak{p}_{m+a}}{\mathfrak{p}_m}$ multiplicirt.

Zusätze.

1) Man gelangt zu denselben Resultaten auch direct durch folgende Betrachtung:

Da die Leistungen der Bank erst mit dem Ende des (a+1)ten Jahres beginnen, so ist die baare Ausgabe derselben

$$= K\left(\frac{P_{m+a}-P_{m+a+1}}{1,0p^{a+1}}+\frac{P_{m+a+1}-P_{m+a+2}}{1,0p^{a+2}}+\ldots\right)$$

$$= K.1,0p^m\left[\left(\frac{P_{m+a}}{1,0p^{m+a+1}}+\frac{P_{m+a+1}}{1,0p^{m+a+2}}+\ldots\right)-\left(\frac{P_{m+a+1}}{1,0p^{m+a+1}}+\frac{P_{m+a+2}}{1,0p^{m+a+2}}+\ldots\right)\right]$$

$$= K.1,0p^m\left[\frac{1}{1,0p}(\mathfrak{p}_{m+a}+\mathfrak{p}_{m+a+1}+\ldots)-\right.$$

$$\left(\mathfrak{p}_{m+a+1} + \mathfrak{p}_{m+a+2} + \ldots\right)\Big]$$

$$= K.1{,}0p^m\left[\frac{\Sigma\mathfrak{p}_{m+a}}{1{,}0p} - \Sigma\mathfrak{p}_{m+a+1}\right]$$

$$= K.1{,}0p^m\left[\frac{\Sigma\mathfrak{p}_{m+a}}{1{,}0p} - (\Sigma\mathfrak{p}_{m+a} - \mathfrak{p}_{m+a})\right]$$

$$= K.1{,}0p^m\left(\mathfrak{p}_{m+a} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\Sigma\mathfrak{p}_{m+a}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Die baare Einnahme der Bank beträgt aber

$$P_m \,.\, {}_aL_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

und man erhält somit aus (6) und (7) wieder:

$${}_aL_m = \frac{K.1{,}0p^m}{P_m}\left(\mathfrak{p}_{m+a} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}.\Sigma\mathfrak{p}_{m+a}\right)$$

$$= \frac{K}{\mathfrak{p}_m}\left(\mathfrak{p}_{m+a} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}.\Sigma\mathfrak{p}_{m+a}\right)$$

$$= \frac{\mathfrak{p}_{m+a}.K}{\mathfrak{p}_m}\left(1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}.\frac{\Sigma\mathfrak{p}_{m+a}}{\mathfrak{p}_{m+a}}\right)$$

$$= \frac{\mathfrak{p}_{m+a}}{\mathfrak{p}_m}.L_{m+a}.$$

2) Führt man statt der Differenzen die oben angeführte Bezeichnung ein, so läßt sich der verlangte Baarwerth auch ausdrücken durch die Gleichung

$${}_aL_m = \frac{K.\Sigma\mathfrak{D}_{m+a+1}}{\mathfrak{p}_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

3) Man nennt eine derartige um a Jahre aufgeschobene Lebensversicherung auch eine Lebensversicherung mit Carenzzeit und die a Jahre, um welche die Versicherung aufgeschoben ist, selbst wenn der Versicherte innerhalb derselben sterben sollte, die Carenzzeit.

Beispiel.

Eine 80jährige Person sichert ihren Erben ein Kapital von 8000 Mk., welches denselben aber nur dann ausbezahlt wird, wenn die versicherte Person nicht innerhalb der 5 ersten Jahre stirbt. Was ist der baare Werth dieser Versicherung, wenn 4prozentige Zinsen berechnet werden?

Auflösung.

Nach Gleichung (5) wird der Baarwerth

$$_5L_{80} = \frac{\mathfrak{p}_{85}}{\mathfrak{p}_{80}} \cdot L_{85},$$

oder nach dem Beispiele zu §. 68:

$$_5L_{80} = \frac{0,6062034 \cdot 6670,0424}{1,6052315} = 2518,89 \text{ Mk.}$$

§. 71. Aufgabe.

Eine mjährige Person sichert nach ihrem Tode ihren Erben ein Kapital K in der Weise, daß dasselbe nicht ausbezahlt wird, im Falle sie im Laufe der ersten a Jahre sterben sollte. Welche Jahresprämie $_aL'_m$ hat jene Person lebenslänglich praenumerando an die Versicherungsanstalt zu leisten?

Auflösung.

Der baare Werth aller bis zum Tode zu entrichtenden Prämien ist offenbar gleich dem baaren Werthe einer vorschüssigen Leibrente $_aL'_m$, welche lebenslänglich bezogen wird, also

$$= {_aL'_m} \cdot {'\varrho_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Der baare Werth der Versicherungssumme ist aber nach §. 70 bezeichnet durch

$$_aL_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Aus der Gleichsetzung von (1) und (2) folgt daher:

$$_aL'_m = \frac{_aL_m}{'\varrho_m} = \frac{_aL_m}{\varrho_m + 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Anmerkung. In den beiden in den §§. 70 und 71 behandelten Fällen kann nun wieder die Frage nach dem baaren Werthe, oder der jährlichen Einlage für den Fall gestellt werden, daß von Seiten der Versicherungsanstalt eine Rückvergütung der schon eingezahlten Summen ohne Zinsen geschehen soll, wenn der Versicherte im Laufe der Carenzzeit sterben sollte. Dieselbe läßt sich nach Früherem leicht beantworten, wenn man die während der a Jahre von der Anstalt an die in dieser Zeit sterbenden Personen zu leistenden Beiträge auf den baaren Werth zurückführt u. s. w.

Beispiel.

Eine 80 jährige Person sichert nach ihrem Tode ihren Erben ein Kapital von 8000 Mk. in der Weise, daß dasselbe nicht ausbezahlt wird, im Falle sie innerhalb der ersten 5 Jahre sterben sollte.

Welche Jahresprämie hat die versicherte Person lebenslänglich an die Versicherungsanstalt zu entrichten bei 4prozentiger Zinsenberechnung?

Auflösung.

Nach Gleichung (3) wird

$$_5L'_{80} = \frac{_5L_{80}}{'\varrho_{80}},$$

oder da nach dem Beispiele zu §. 70

$$_5L_{80} = 2518{,}89$$

und $$'\varrho_{80} = \frac{\Sigma \mathfrak{P}_{80}}{\mathfrak{P}_{80}} = \frac{8{,}3508594}{1{,}6052315} = 5{,}20228,$$

ist, $$_5L'_{80} = \frac{2518{,}89}{5{,}20228} = 484{,}19 \text{ Mk.}$$

γ) Temporäre Lebensversicherung.

§. 72. Aufgabe.

Eine mjährige Person sichert ihren Erben ein Kapital K, das denselben aber nur in dem Falle ausbezahlt wird, wenn die versicherte Person im Laufe der ersten t Jahre stirbt. Wie groß ist die zu machende baare Einlage $_{(t)}L_m$?

Auflösung.

Nehmen wir an, die mjährige Person erhalte die Versicherungssumme bei eintretendem Todesfalle, so wäre der Baarwerth nach §. 68 dargestellt durch

$$L_m.$$

Dieser ist aber offenbar um den Baarwerth einer um t Jahre aufgeschobenen Lebensversicherung größer als die verlangte. Da derselbe aber nach §. 70 dargestellt ist durch

$$_tL_m,$$

so bleibt für den in Frage stehenden Baarwerth

$$_{(t)}L_m = L_m - {_tL_m} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Zusatz.

Zu demselben Resultate gelangt man auch direct auf folgende Weise:

Da im Laufe des

1ten, 2ten, ... tten

Jahres

$P_m - P_{m+1},\quad P_{m+1} - P_{m+2},\quad \ldots\quad P_{m+t-1} - P_{m+t}$

Personen sterben, so ist die baare Ausgabe der Bank:

$$= K\left(\frac{P_m - P_{m+1}}{1{,}0p} + \frac{P_{m+1} - P_{m+2}}{1{,}0p^2} + \ldots + \frac{P_{m+t-1} - P_{m+t}}{1{,}0p^t}\right)$$

$$= K\left[\left(\frac{P_m}{1{,}0p} + \frac{P_{m+1}}{1{,}0p^2} + \ldots + \frac{P_{m+t-1}}{1{,}0p^t}\right) - \left(\frac{P_{m+1}}{1{,}0p} + \frac{P_{m+2}}{1{,}0p^2} + \ldots + \frac{P_{m+t}}{1{,}0p^t}\right)\right]$$

$$= K.1{,}0p^m\left[\left(\frac{P_m}{1{,}0p^{m+1}} + \frac{P_{m+1}}{1{,}0p^{m+2}} + \ldots + \frac{P_{m+t-1}}{1{,}0p^{m+t}}\right) - \left(\frac{P_{m+1}}{1{,}0p^{m+1}} + \frac{P_{m+2}}{1{,}0p^{m+2}} + \ldots + \frac{P_{m+t}}{1{,}0p^{m+t}}\right)\right]$$

$$= K.1{,}0p^m\left[\left(\frac{\mathfrak{p}_m + \mathfrak{p}_{m+1} + \ldots + \mathfrak{p}_{m+t-1}}{1{,}0p}\right) - \left(\mathfrak{p}_{m+1} + \mathfrak{p}_{m+2} + \ldots + \mathfrak{p}_{m+t}\right)\right]$$

$$= K.1{,}0p^m\left[\frac{\Sigma\mathfrak{p}_m - \Sigma\mathfrak{p}_{m+t}}{1{,}0p} - (\Sigma\mathfrak{p}_{m+1} - \Sigma\mathfrak{p}_{m+t+1})\right]$$

$$= K.1{,}0p^m\left[\frac{\Sigma\mathfrak{p}_m - \Sigma\mathfrak{p}_{m+t}}{1{,}0p} - (\Sigma\mathfrak{p}_m - \Sigma\mathfrak{p}_{m+t} - \mathfrak{p}_m + \mathfrak{p}_{m+t})\right]$$

$$= K.1{,}0p^m\left[(\Sigma\mathfrak{p}_m - \Sigma\mathfrak{p}_{m+t})\left(\frac{1}{1{,}0p} - 1\right) + \mathfrak{p}_m - \mathfrak{p}_{m+t}\right]$$

$$= K.1{,}0p^m\left[\mathfrak{p}_m - \mathfrak{p}_{m+t} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}(\Sigma\mathfrak{p}_m - \Sigma\mathfrak{p}_{m+t})\right] \ldots \quad (2).$$

Die baare Einnahme der Bank ist dagegen

$$P_m \,.\, {}_{(t)}L_m \ldots\ldots \quad (3)$$

und man erhält somit aus (1) und (2):

$${}_{(t)}L_m = \frac{K.1{,}0p^m}{P_m}\left[\mathfrak{p}_m - \mathfrak{p}_{m+t} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}(\Sigma\mathfrak{p}_m - \Sigma\mathfrak{p}_{m+t})\right]$$

$$= \frac{K}{\mathfrak{p}_m}\left[\mathfrak{p}_m - \mathfrak{p}_{m+t} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}(\Sigma\mathfrak{p}_m - \Sigma\mathfrak{p}_{m+t})\right] \ldots \quad (4).$$

Schreibt man dafür

$${}_{(t)}L_m = K\left(1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}.\frac{\Sigma\mathfrak{p}_m}{\mathfrak{p}_m}\right) - \frac{\mathfrak{p}_{m+t}.K}{\mathfrak{p}_m}\left(1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}.\frac{\Sigma\mathfrak{p}_{m+t}}{\mathfrak{p}_{m+t}}\right)$$

$$= K\left(1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p} \cdot {}'\varrho_m\right) - \frac{\mathfrak{P}_{m+t} \cdot K}{\mathfrak{P}_m}\left(1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p} \cdot {}'\varrho_{m+t}\right),$$

so geht nach §. 86 (4) und §. 70 (3) die Gleichung (4) über in:

$$_{(t)}L_m = L_m - {}_tL_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Anmerkung. Rascher gelangt man zu diesem Resultate, wenn man von der in §. 68 für die Differenzen

$$P_m - P_{m+1}, \quad P_{m+1} - P_{m+2}, \quad \ldots . \quad P_{m+t-1} - P_{m+t}$$

eingeführten Bezeichnung

$$D_{m+1}, \quad D_{m+2} \quad \ldots . \quad D_{m+t}$$

Gebrauch macht und hiernach den Baarwerth der Einnahmen

$$= K\left(\frac{D_{m+1}}{1{,}0p} + \frac{D_{m+2}}{1{,}0p^2} + \ldots . + \frac{D_{m+t}}{1{,}0p^t}\right)$$

$$= K \cdot 1{,}0p^m \left(\frac{D_{m+1}}{1{,}0p^{m+1}} + \frac{D_{m+2}}{1{,}0p^{m+2}} + \ldots . + \frac{D_{m+t}}{1{,}0p^{m+t}}\right)$$

$$= K \cdot 1{,}0p^m (\mathfrak{D}_{m+1} + \mathfrak{D}_{m+2} + \ldots . + \mathfrak{D}_{m+t})$$

$$= K \cdot 1{,}0p^m (\Sigma\mathfrak{D}_{m+1} - \Sigma\mathfrak{D}_{m+t+1})$$

setzt.

Es wird alsdann

$$_{(t)}L_m = \frac{K(\Sigma\mathfrak{D}_{m+1} - \Sigma\mathfrak{D}_{m+t+1})}{\mathfrak{P}_m}$$

oder nach §. 68 (7) und §. 70 (8) wieder

$$_{(t)}L_m = L_m - {}_tL_m \, .$$

Beispiel.

Eine 80jährige Person sichert ihren Erben ein Kapital von 8000 Mk., welches aber nur dann an dieselben nach dem Tode der versicherten Person ausbezahlt wird, wenn diese innerhalb der fünf ersten Jahre stirbt; wie groß ist der baare Werth dieser Versicherung bei 4prozentigem Zinsfuße?

Auflösung.

Nach Gleichung (1) wird

$$_{(5)}L_{80} = L_{80} - {}_5L_{80}.$$

Nun ist aber nach §. 68 (4)

$$L_{80} = 8000\left(1 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot {}'\varrho_{80}\right)$$

$$= 8000\left(1 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot 5{,}20228\right)$$

$$= \frac{8000 \cdot 0{,}8319088}{1{,}04} = 6399{,}32$$

und nach dem Beispiele zu §. 70

$$_5L_{80} = 2518{,}89;$$

folglich

$$_{(5)}L_{80} = 6399{,}32 - 2518{,}89 = 3880{,}43 \text{ Mk.}$$

§. 73. Aufgabe.

Eine mjährige Person sichert ihren Erben ein Kapital K, das denselben aber nur in dem Falle ausbezahlt wird, wenn der Versicherte im Laufe der ersten t Jahre stirbt. Welche Prämie ${}_{(t)}L'_m$ hat jene Person zu Anfang eines jeden Jahres während der t Jahre resp. bis zu ihrem Tode an die Bank zu entrichten?

Auflösung.

Berücksichtigt man, daß der baare Werth der Jahresprämien gleich dem baaren Werth einer auf t Jahre temporären vorschüssigen Leibrente im Betrage ${}_{(t)}L_m$, also

$$= {}_{(t)}L'_m \,.\, {}_{(t)}{}'\varrho_m$$

und der baare Werth der Bankleistung nach §. 72 ausgedrückt ist durch

$${}_{(t)}L_m,$$

so erhält man die Gleichung

$${}_{(t)}L'_m \,.\, {}_{(t)}{}'\varrho_m = {}_{(t)}L_m$$

und hieraus

$${}_{(t)}L'_m = \frac{{}_{(t)}L_m}{{}_{(t)}{}'\varrho_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Anmerkung. Auch in den hier behandelten Fällen gewährt die Bank gegen besondere Einlagen die Rückvergütung der schon geleisteten Einlagen ohne Zinsen, im Falle der Tod des Versicherten nicht innerhalb der festgesetzten Zeit eintreten sollte. Die in diesem Falle zu machende baare Einlage oder Jahresprämie zu bestimmen hat keine Schwierigkeit, wenn man nur beachtet, daß für den Fall einer baaren Einlage die Bank nach t Jahren die Summe $P_{m+t} \,.\, {}_{(t)}L_m$, also baar

$$\frac{P_{m+t} \,.\, {}_{(t)}L_m}{1{,}0p^t}$$

zurückerstatten muß, wovon also auf eine der P_m Personen der Betrag

$$\frac{P_{m+t} \,.\, {}_{(t)}L_m}{1{,}0p^t \,.\, P_m} = \frac{\mathfrak{p}_{m+t} \,.\, {}_{(t)}L_m}{\mathfrak{p}_m}$$

mehr kommt, sowie daß im Falle jährlicher Prämienzahlung die Bank nach t Jahren

$$t \,.\, P_{m+t} \,.\, {}_{(t)}L'_m$$

Prämien, also baar

$$\frac{t \,.\, P_{m+t} \,.\, {}_{(t)}L'_m}{1{,}0p^t}$$

zurückzugeben hat, woraus sich für eine der P_m Personen der Mehrbetrag

$$\frac{t \,.\, P_{m+t} \,.\, {}_{(t)}L'_m}{P_m \,.\, 1{,}0p^t} = \frac{t \,.\, \mathfrak{p}_{m+t} \,.\, {}_{(t)}L'_m}{\mathfrak{p}_m}$$

ergibt.

Beispiel.

Eine 80jährige Person sichert ihren Erben ein Kapital von 8000 Mk., das denselben aber nur in dem Falle ausbezahlt wird, wenn jene Person im Laufe der ersten 5 Jahre stirbt. Welche Prämie hat der Versicherte während der 5 Jahre resp. bis zu seinem Tode zu entrichten, wenn der Berechnung ein 4prozentiger Zinsfuß zu Grunde gelegt wird?

Auflösung.

Nach Gleichung (1) ist die Prämie

$$ {}_{(5)}L'_{80} = \frac{{}_{(5)}L_{80}}{{}_{(5)}\varrho'_{80}}. $$

Nun ist aber nach dem Beispiele zu §. 72

$$ {}_{(5)}L_{80} = 3880{,}43, $$

ferner nach §. 50 (2)

$$ {}_{(5)}\varrho'_{80} = \frac{\Sigma \mathfrak{p}_{80} - \Sigma \mathfrak{p}_{85}}{\mathfrak{p}_{80}} $$

$$ = \frac{8{,}3508594 - 2{,}6202336}{1{,}6052315} = 3{,}56997. $$

Also wird

$$ {}_{(5)}L'_{80} = \frac{3880{,}43}{3{,}56997} = 1086{,}963 \text{ Mk.} $$

b) Prämienberechnung für die Versicherung verbundener Leben.

α) Versicherung auf den Tod des Zuerststerbenden.

§. 74. Aufgabe.

Eine m- und eine njährige Person versichern ihr Leben in der Weise, daß der einen am Ende des Todesjahres der anderen ein Kapital K von der Versicherungsanstalt ausbezahlt wird. Wie groß ist die zu machende baare Einlage ${}^{t}L_{m,n}$?

Auflösung.

Nehmen wir an, daß gleichzeitig $P_m . P_n$ solcher Paare bei dieser Versicherungsart sich betheiligen, so ist nach §. 52 die Anzahl der im Laufe des

1ten, 2ten, ...

Jahres aufgelösten Paare der Reihe nach:

$$ P_m . P_n - P_{m+1} . P_{n+1}, \quad P_{m+1} . P_{n+1} - P_{m+2} . P_{n+2}, \ldots . $$

folglich ist die baare Ausgabe der Bank, wenn man sich, im Falle verbundene Personen in einem und demselben Jahre sterben sollten, das Kapital den Erben des Zuletztsterbenden am Ende des betreffenden Jahres zugestellt denkt,

$$= K\left(\frac{P_m . P_n - P_{m+1} . P_{n+1}}{1{,}0p} + \frac{P_{m+1} . P_{n+1} - P_{m+2} . P_{n+2}}{1{,}0p^2} + \ldots\right)$$

$$= K\left[\left(\frac{P_m . P_n}{1{,}0p} + \frac{P_{m+1} . P_{n+1}}{1{,}0p^2} + \ldots\right) - \left(\frac{P_{m+1} . P_{n+1}}{1{,}0p} + \frac{P_{m+2} . P_{n+2}}{1{,}0p^2} + \ldots\right)\right]$$

$$= K\left[1{,}0p^{m-1}\left(\frac{P_m . P_n}{1{,}0p^m} + \frac{P_{m+1} . P_{n+1}}{1{,}0p^{m+1}} + \ldots\right) - 1{,}0p^m\left(\frac{P_{m+1} . P_{n+1}}{1{,}0p^{m+1}} + \frac{P_{m+2} . P_{n+2}}{1{,}0p^{m+2}} + \ldots\right)\right]$$

$$= K[1{,}0p^{m-1}(\mathfrak{P}_m . P_n + \mathfrak{P}_{m+1} . P_{n+1} + \ldots) - 1{,}0p^m(\mathfrak{P}_{m+1} . P_{n+1} + \mathfrak{P}_{m+2} . P_{n+2} + \ldots)]$$

$$= K[1{,}0p^{m-1} . \Sigma(\mathfrak{P}_m . P_n) - 1{,}0p^m(\Sigma(\mathfrak{P}_m . P_n) - \mathfrak{P}_m . P_n)]$$

$$= K . 1{,}0p^m\left[\frac{\Sigma(\mathfrak{P}_m . P_n)}{1{,}0p} - \Sigma(\mathfrak{P}_m . P_n) + \mathfrak{P}_m . P_n\right]$$

$$= K . 1{,}0p^m\left[\mathfrak{P}_m . P_n - \left(1 - \frac{1}{1{,}0p}\right)\Sigma(\mathfrak{P}_m . P_n)\right]$$

$$= K . 1{,}0p^m\left[\mathfrak{P}_m . P_n - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\Sigma(\mathfrak{P}_m . P_n)\right] \ldots\ldots\ldots (1).$$

Die baare Einnahme der Bank ist dagegen

$$= P_m . P_n . {}^{\dagger}L_{m,n} \ldots\ldots\ldots (2).$$

Aus (1) und (2) folgt die Gleichung:

$$P_m . P_n . {}^{\dagger}L_{m,n} = K . 1{,}0p^m\left[\mathfrak{P}_m . P_n - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\Sigma(\mathfrak{P}_m . P_n)\right]$$

und hieraus:

$${}^{\dagger}L_{m,n} = \frac{K . 1{,}0p^m}{P_m . P_n}\left[\mathfrak{P}_m . P - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\Sigma(\mathfrak{P}_m . P_n)\right]$$

$$= \frac{K}{\mathfrak{P}_m . P_n}\left[\mathfrak{P}_m . P_n - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\Sigma(\mathfrak{P}_m . P_n)\right]$$

$$= K\left[1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p} . \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_m . P_n)}{\mathfrak{P}_m . P_n}\right] \ldots\ldots\ldots (3)$$

oder nach §. 52 (6)

$$^{t}L_{m,n} = K\left(1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\,{}^{k'}\varrho_{m,n}\right) \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

$$= K\left[1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\left({}^{k}\varrho_{m,n} + 1\right)\right] \ldots \ldots \ldots (5).$$

Beispiel.

Eine 88- und eine 85jährige Person versichern ihr Leben in der Weise, daß der einen am Ende des Todesjahres der anderen ein Kapital von 8000 Mk. von der Versicherungsanstalt ausbezahlt wird. Wie groß ist die zu machende baare Einlage bei 4prozentiger Zinsenberechnung?

Auflösung.

Nach Gleichung (4) hat man

$$^{t}L_{88.85} = 8000\left(1 - \frac{0{,}04}{1{,}04}\,{}^{k'}\varrho_{88.85}\right).$$

Nun ist aber nach dem Beispiele 3 zu §. 52

$$^{k'}\varrho_{88.85} = 2{,}59864,$$

also

$$^{t}L_{88.85} = 8000\left(1 - \frac{0{,}04 \,.\, 2{,}59864}{1{,}04}\right)$$

$$= 8000(1 - 0{,}099947) = 7200{,}42 \text{ Mk.}$$

§. 75. Aufgabe.

Eine m- und eine njährige Person versichern ihr Leben in der Weise, daß der einen am Ende des Todesjahres der anderen ein Kapital K von der Versicherungsanstalt ausbezahlt wird; wie groß ist die bis zum eintretenden Todesfalle praenumerando zu leistende Jahresprämie $^{t}L'_{m,n}$?

Auflösung.

Da die Bankleistung die gleiche bleibt wie in der vorhergehenden Aufgabe, diese aber nach §. 74 (4) ausgedrückt ist durch

$$^{t}L_{m,n} = K\left(1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\,.\,{}^{k'}\varrho_{m,n}\right) \ldots \ldots \ldots (1)$$

und der baare Werth der Jahresprämien gleich dem baaren Werthe einer *vorschüssigen* Verbindungsrente im Betrage von je $^{t}L'_{m,n}$ auf das kürzeste Leben, also

$$= {}^{\dagger}L'_{m,n} \cdot {}^{k'}\varrho_{m,n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ist, so erhält man durch Gleichsetzung der Ausdrücke (1) und (2):

$${}^{\dagger}L'_{m,n} \cdot {}^{k'}\varrho_{m,n} = {}^{\dagger}L_{m,n}$$

und hieraus die Prämie

$${}^{\dagger}L'_{m,n} = \frac{{}^{\dagger}L_{m,n}}{{}^{k'}\varrho_{m,n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

oder

$${}^{\dagger}L'_{m,n} = \frac{K}{{}^{k'}\varrho_{m,n}}\left(1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\,{}^{k'}\varrho_{m,n}\right)$$

$$= K\left(\frac{1}{{}^{k'}\varrho_{m,n}} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$= K\left(\frac{1}{{}^{k}\varrho_{m,n} + 1} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\right) \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Beispiel.

Welche Prämie haben eine 88- und eine 85jährige Person an eine Lebensversicherungsanstalt praenumerando zu zahlen, damit von dieser der einen am Ende des Todesjahres der anderen ein Kapital von 8000 Mk. ausbezahlt werden kann, wenn der Zinsfuß zu 4 % berechnet wird?

Auflösung.

Nach Gleichung (3) ist

$${}^{\dagger}L'_{88.85} = \frac{{}^{\dagger}L_{88.85}}{{}^{k'}\varrho_{88.85}}$$

oder nach dem Beispiele zu §. 74

$${}^{\dagger}L'_{88.85} = \frac{7200{,}42}{2{,}59864} = 2770{,}78 \text{ Mk.}$$

β) Versicherung auf den Tod des Zuletztsterbenden.

§. 76. Aufgabe.

Eine m- und eine njährige Person versichern ihr Leben in der Weise, daß die Erben der zuletztsterbenden nach deren Tode von der Bank ein Kapital K ausbezahlt bekommen. Wie groß ist der baare Werth ${}^{\dagger\dagger}L_{m,n}$ dieser Versicherung?

Auflösung.

Nehmen wir an, daß jede dieser Personen sich auf lebens-

länglich versichert hätte, so wäre der Baarwerth beider Versicherungen

$$= L_m + L_n.$$

In diesem Falle würde aber die Bank den baaren Werth eines Kapitals, welches mit dem Tode des Zuerststerbenden fällig wird, zu viel leisten. Bringt man demnach diesen Werth ${}^{\dagger}L_{m,n}$ an vorstehender Summe in Abzug, so bleibt für den verlangten Baarwerth

$$^{\dagger\dagger}L_{m,n} = L_m + L_n - {}^{\dagger}L_{m,n} \;.\;.\;.\;.\;.\; (1),$$

oder wenn man nach §. 68 (4) und §. 74 (4) die betreffenden Werthe einführt, um den Baarwerth in Leibrenten auszudrücken:

$$^{\dagger\dagger}L_{m,n} = K\left(1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\,{}'\varrho_m\right) + K\left(1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\,{}'\varrho_n\right)$$
$$- K\left(1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\,{}^{k'}\varrho_{m,n}\right)$$

oder nach gehöriger Reduction

$$^{\dagger\dagger}L_{m,n} = K\left[1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\left({}'\varrho_m + {}'\varrho_n - {}^{k'}\varrho_{m,n}\right)\right] \ldots (2)$$
$$= K\left[1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\left(\varrho_m + \varrho_n - {}^{k}\varrho_{m,n} + 1\right)\right] \ldots (3),$$

oder auch nach §. 56 (5) und (6)

$$^{\dagger\dagger}L_{m,n} = K\left[1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p} \cdot {}^{\prime\prime}\varrho_{m,n}\right] \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (4)$$
$$= K\left[1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\left({}'\varrho_{m,n} + 1\right)\right] \;.\;.\;.\;.\;.\; (5).$$

Beispiel.

Eine 88= und eine 85jährige Person versichern ihr Leben in der Weise, daß die Erben der zuletztsterbenden nach deren Tode von der Versicherungsanstalt ein Kapital von 8000 Mk. ausbezahlt bekommen. Wie groß ist der baare Versicherungswerth bei Berechnung 4 prozentiger Zinsen?

Auflösung.

Nach Gleichung (1) ist

$$^{\dagger\dagger}L_{88.85} = L_{88} + L_{85} - {}^{\dagger}L_{88.85}$$

oder da nach §. 68 (4)

$$L_{88} = 8000\left(1 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot {}'\varrho_{88}\right)$$

$$= 8000\left(1 - \frac{0,04 \, . \, 3,59102}{1,04}\right)$$
$$= 8000(1 - 0,13808)$$
$$= 8000 . 0,86192 = 6895,36,$$

nach dem Beispiele zu §. 68

$$L_{85} = 6670,0424$$

und nach dem Beispiele zu §. 74

$$^{+}L_{88.85} = 7200,42$$

ist, $\quad {}^{++}L_{88.85} = 6895,36 + 6670,0424 - 7200,42$
$$= 6364,9824 \text{ Mk.}$$

§. 77. Aufgabe.

Eine m- und eine njährige Person versichern ihr Leben in der Weise, daß die Erben der zuletztsterbenden ein Kapital K von der Versicherungsanstalt ausbezahlt erhalten. Wie groß ist die praenumerando zu leistende Jahresprämie, wenn dieselbe

α) bis zum Tode der zuerststerbenden,

β) bis zum Tode der zuletztsterbenden

Person entrichtet wird?

Auflösung.

Der Baarwerth der Bankleistung bleibt in beiden Fällen derselbe und ist nach Vorhergehendem ausgedrückt durch

$$^{++}L_{m,n}.$$

Bezeichnen wir nun die Jahresprämie im ersten Falle durch $^{+}L'_{m,n}$, im zweiten durch $^{++}L'_{m,n}$, so ist der Baarwerth aller Prämien oder die baare Einnahme der Bank in jenem Falle gleich dem Baarwerthe einer vorschüssigen Verbindungsrente $^{+}L_{m,n}$ auf das kürzeste Leben, in diesem dagegen gleich dem Baarwerthe einer vorschüssigen Verbindungsrente $^{++}L_{m,n}$ auf das längste Leben

Man erhält somit für den ersten Fall:

$$^{+}L'_{m,n} . {}^{k'}\varrho_{m,n} = {}^{++}L_{m,n}$$

und für den zweiten Fall:

$$^{++}L'_{m,n} . {}^{l'}\varrho_{m,n} = {}^{++}L_{m,n}$$

woraus bezüglich folgt:

$$^{+}L'_{m,n} = \frac{^{++}L_{m,n}}{^{k'}\varrho_{m,n}} = \frac{^{++}L_{m,n}}{^{k}\varrho_{m,n} + 1} \quad \ldots \ldots (1)$$

$$^{++}L'_{m,n} = \frac{^{++}L_{m,n}}{^{l'}\varrho_{m,n}} = \frac{^{++}L_{m,n}}{^{l}\varrho_{m,n} + 1} \quad \ldots \ldots (2).$$

Um die verlangte Prämie nun in Leibrenten auszudrücken, führe man in die Formeln (1) und (2) die betreffenden Werthe aus §. 76 (2) oder (3) ein.

Man erhält alsdann

$$^{\dagger}L'_{m,n} = \frac{K}{^{k'}\varrho_{m,n}}\left[1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}('\varrho_m + '\varrho_n - {}^{k'}\varrho_{m,n})\right] \ldots\ldots (3)$$

$$= \frac{K}{^{k}\varrho_{m,n}+1}\left[1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}(\varrho_m + \varrho_n - {}^{k}\varrho_{m,n}+1)\right] \ldots. (4)$$

$$^{\dagger\dagger}L'_{m,n} = \frac{K}{^{l'}\varrho_{m,n}}\left[1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}('\varrho_m + '\varrho_n - {}^{k'}\varrho_{m,n})\right] \ldots\ldots (5)$$

$$= \frac{K}{^{l}\varrho_{m,n}+1}\left[1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}(\varrho_m + \varrho_n - {}^{k}\varrho_{m,n}+1)\right] \ldots. (6).$$

Beispiele.

1) Eine 88= und eine 85jährige Person versichern ihr Leben in der Weise, daß die Erben der von beiden zuletztsterbenden 8000 Mk. von der Anstalt erhalten. Wie groß ist die bis zum Tode der zuerststerbenden Person praenumerando zu leistende Jahresprämie, wenn 4prozentige Zinsen berechnet werden?

Auflösung.

Nach Gleichung (1) ist

$$^{\dagger}L'_{88.85} = \frac{^{\dagger\dagger}L_{88.85}}{^{k'}\varrho_{88.85}}$$

oder da nach Beispielen zu §. 76

$$^{\dagger\dagger}L_{88.85} = 6364{,}9824$$

und nach dem Beispiele 3 zu §. 52

$$^{k'}\varrho_{88.85} = 2{,}59864$$

ist:

$$^{\dagger}L'_{88.85} = \frac{6364{,}9824}{2{,}59864} = 2449{,}35 \text{ Mk.}$$

2) Wie groß ist in vorhergehender Aufgabe die zu leistende Prämie, wenn solche bis zum Tode der zuletztsterbenden Person entrichtet wird?

Auflösung.

Nach Gleichung (2) ist

$$^{\dagger\dagger}L'_{88.85} = \frac{^{\dagger\dagger}L_{88.85}}{^{l'}\varrho_{88.85}}$$

oder da nach dem Beispiele zu §. 76

$$^{\dagger\dagger}L_{88.85} = 6364{,}9824$$

und nach §. 56 und dem Beispiele 3 zu §. 52

$$\begin{aligned} {}''\varrho_{88.85} &= {}'\varrho_{88} + {}'\varrho_{85} = {}^{k'}\varrho_{88.85} \\ &= 3{,}59102 + 4{,}32236 - 2{,}59864 \\ &= 5{,}31474 \end{aligned}$$

ist:

$$^{\dagger\dagger}L'_{88.85} = \frac{6364{,}9824}{5{,}31474} = 1197{,}6 \text{ Mk.}$$

γ) Aufgeschobene Lebensversicherung.

§. 78. Aufgabe.

Eine m- und eine njährige Person versichern ihr Leben in der Weise, daß die Bank der länger lebenden Person nach dem Tode der anderen ein Kapital K auszuzahlen hat, dieser Pflicht jedoch enthoben ist, sobald der Todesfall im Laufe der ersten a Jahre eintritt. Wie groß ist der baare Werth $^{\dagger}_{a}L_{m,n}$ dieser Versicherung?

Auflösung.

Nehmen wir an, die beiden Personen wären a Jahre älter und hätten ihr Leben auf ein Kapital K auf den Tod der zuerst-sterbenden versichert, so wäre der Baarwerth der Versicherungs-summe für dieses Paar nach §. 74 ausgedrückt durch

$$^{\dagger}L_{m+a,\, n+a}$$

und würde also für die in einem um a Jahre höheren Alter lebenden $P_{m+a} . P_{n+a}$ Personen

$$P_{m+a} . P_{n+a} . {}^{\dagger}L_{m+a,\, n+a}$$

betragen, was auf jetzt discontirt den Werth

$$\frac{P_{m+a} . P_{n+a}}{1{,}0p^{a}} . {}^{\dagger}L_{m+a,\, n+a}$$

gibt.

Da aber gegenwärtig $P_m . P_n$ Paare leben, so wird für eines derselben der baare Versicherungswerth

$$^{\dagger}_{a}L_{m,n} = \frac{P_{m+a} . P_{n+a}}{1{,}0p^{a} . P_m . P_n} . {}^{\dagger}L_{m+a,\, n+a}$$

oder wenn man

$$\frac{P_{m+a} . P_{n+a}}{1{,}0p^{a} . P_m . P_n} = \frac{\dfrac{P_{m+a}}{1{,}0p^{m+a}} . P_{n+a}}{\dfrac{P_m}{1{,}0p_m} . P_n} = \frac{\mathfrak{p}_{m+a} . P_{n+a}}{\mathfrak{p}_m . P_n}$$

setzt:

$$ {}^{\dagger}_{a}L_{m,n} = \frac{\mathfrak{p}_{m+a} \cdot P_{n+a}}{\mathfrak{p}_m \cdot P_n} \cdot {}^{\dagger}L_{m+a,\,n+a} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(1).} $$

Führt man in diese Gleichung den Werth von ${}^{\dagger}L_{m+a,\,n+a}$ nach §. 74 (4) ein, so geht dieselbe über in:

$$ {}^{\dagger}_{a}L_{m,n} = \frac{K \cdot \mathfrak{p}_{m+a} \cdot P_{n+a}}{\mathfrak{p}_m \cdot P_n}\left(1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p} \cdot {}^{k'}\varrho_{m+a,\,n+a}\right) \ldots \text{(2).} $$

Zusätze.

1) Zu demselben Resultate gelangt man auch direct durch folgende Betrachtung:

Von den $P_m \cdot P_n$ Paaren, welche gleichzeitig eine derartige Versicherung eingehen, sind nach dem

(a+1)ten, (a+2)ten

Jahre der Reihe nach aufgelöst:

$P_{m+a} \cdot P_{n+a} - P_{m+a+1} \cdot P_{n+a+1}$, $P_{m+a+1} \cdot P_{n+a+1} - P_{m+a+2} \cdot P_{n+a+2}$.

Die baare Leistung der Bank ist somit

$$ = K\left(\frac{P_{m+a} \cdot P_{n+a} - P_{m+a+1} \cdot P_{n+a+1}}{1{,}0p^{a+1}} + \frac{P_{m+a+1} \cdot P_{n+a+1} - P_{m+a+2} \cdot P_{n+a+2}}{1{,}0p^{a+2}} + \ldots\right) $$

$$ = K \cdot 1{,}0p^m \left[\left(\frac{P_{m+a} \cdot P_{n+a}}{1{,}0p^{m+a+1}} + \frac{P_{m+a+1} \cdot P_{n+a+1}}{1{,}0p^{m+a+2}} + \ldots\right) - \left(\frac{P_{m+a+1} \cdot P_{n+a+1}}{1{,}0p^{m+a+1}} + \frac{P_{m+a+2} \cdot P_{n+a+2}}{1{,}0p^{m+a+2}} + \ldots\right)\right] $$

$$ = K \cdot 1{,}0p^m \left[\frac{1}{1{,}0p}\left(\mathfrak{p}_{m+a} \cdot P_{n+a} + \mathfrak{p}_{m+a+1} \cdot P_{n+a+1} + \ldots\right) - \left(\mathfrak{p}_{m+a+1} \cdot P_{n+a+1} + \mathfrak{p}_{m+a+2} \cdot P_{n+a+2} + \ldots\right)\right] $$

$$ = K \cdot 1{,}0p^m \left[\frac{1}{1{,}0p} \Sigma(\mathfrak{p}_{m+a} \cdot P_{n+a}) - \Sigma(\mathfrak{p}_{m+a+1} \cdot P_{n+a+1})\right] $$

$$ = K \cdot 1{,}0p^m \left[\frac{1}{1{,}0p} \Sigma(\mathfrak{p}_{m+a} \cdot P_{n+a}) - \Sigma(\mathfrak{p}_{m+a} \cdot P_{n+a}) + \mathfrak{p}_{m+a} \cdot P_{n+a}\right] $$

$$ = K \cdot 1{,}0p^m \left[\mathfrak{p}_{m+a} \cdot P_{n+a} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p} \Sigma(\mathfrak{p}_{m+a} \cdot P_{n+a})\right] \ldots\ldots \text{(3).} $$

Die baare Einnahme der Bank ist aber

$$= P_m \,.\, P_n \,.\, {}^{\dagger}_{a}L_{m,n} \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

und man erhält somit aus (3) und (4) die Gleichung

$$P_m \,.\, P \,.\, {}^{\dagger}_{a}L_{m,n} = K \,.\, 1{,}0p^m \left[\mathfrak{P}_{m+a} \,.\, P_{n+a} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p} \Sigma(\mathfrak{P}_{m+a} \,.\, P_{n+a})\right]$$

und hieraus:

$${}^{\dagger}_{a}L_{m,n} = \frac{K}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_n}\left[\mathfrak{P}_{m+a} \,.\, P_{n+a} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\Sigma(\mathfrak{P}_{m+a} \,.\, P_{n+a})\right] \ldots . (5)$$

$$= K\left[\frac{\mathfrak{P}_{m+a} \,.\, P_{n+a}}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_n} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{m+a} \,.\, P_{n+a}}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_n} \cdot \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{m+a} \,.\, P_{n+a})}{\mathfrak{P}_{m+a} \,.\, P_{n+a}}\right]$$

$$= K\left[\frac{\mathfrak{P}_{m+a} \,.\, P_{n+a}}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_n}\left(1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p} \cdot \frac{\Sigma(\mathfrak{P}_{m+a} \,.\, P_{n+a})}{\mathfrak{P}_{m+a} \,.\, P_{n+a}}\right)\right].$$

oder nach §. 56:

$${}^{\dagger}_{a}L_{m,n} = \frac{K \,.\, \mathfrak{P}_{m+a} \,.\, P_{n+a}}{\mathfrak{P}_m \,.\, P_n}\left(1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p} \,.\, {}^{k'}\varrho_{m+a,n+a}\right),$$

wie oben in (2) gefunden wurde.

2) Um die praenumerando zu zahlende Jahresprämie zu finden, wenn diese bis zum eintretenden Todesfalle der einen Person entrichtet werden soll, hat man wieder vorstehenden Versicherungswerth durch den Baarwerth der Verbindungsrente 1 auf das kürzeste Leben zu dividiren.

3) Für den Fall, daß unter Voraussetzung einer aufgeschobenen Versicherung das Kapital an die Erben der zuletztsterbenden Person ausbezahlt werden soll, hat man, um den Baarwerth zu bestimmen, unter Berücksichtigung des §. 76 analog zu verfahren wie oben.

Beispiel.

Eine 83- und eine 80jährige Person schließen einen Lebensversicherungsvertrag in der Art ab, daß die länger lebende derselben nach dem Tode der anderen ein Kapital von 8000 Mk. erhält, vorausgesetzt, daß der Todesfall sich nicht innerhalb der ersten 5 Jahre ereignet. Wie groß ist der baare Werth dieser Versicherung bei 4 prozentiger Zinsenberechnung?

Auflösung.

Nach Gleichung (1) folgt:

$${}^{\dagger}I_{83.80} = \frac{\mathfrak{P}_{88} \cdot P_{85}}{\mathfrak{P}_{83} \cdot P_{80}} \cdot {}^{\dagger}I_{88.85}$$

$$= \frac{0,3170075.17}{0,9256510.37} . {}^{\dagger}L_{88.85} = 0,157351 . {}^{\dagger}L_{88.85}$$

oder da nach dem Beispiele zu §. 74:

$${}^{\dagger}L_{88.85} = 7200,42$$

ist:

$${}^{\dagger}_{5}L_{83.80} = 0,157351 . 7200,42 = 1132,99 \text{ Mk.}$$

δ) Temporäre Lebensversicherung auf den Zuerststerbenden.

§. 79. Aufgabe.

Eine m- und eine n jährige Person schließen einen Lebensversicherungsvertrag in der Art ab, daß diejenige von ihnen ein Kapital K ausbezahlt erhält, welche die andere überlebt, jedoch unter der Voraussetzung, daß der Todesfall innerhalb der ersten t Jahre eintritt. Wie groß ist der baare Werth ${}_{(t)}^{\dagger}L_{m,n}$ dieser temporären Versicherung?

Auflösung.

Nehmen wir an, der Versicherungsvertrag sei überhaupt auf den Zuerststerbenden abgeschlossen, so wäre der Baarwerth der Bankleistung ausgedrückt durch

$${}^{\dagger}L_{m,n}.$$

Dieser ist aber offenbar um den Baarwerth einer um t Jahre aufgeschobenen Lebensversicherung oder um

$${}^{\dagger}_{t}L_{m,n}$$

zu groß. Man erhält somit für den verlangten Baarwerth

$${}_{(t)}^{\dagger}L_{m,n} = {}^{\dagger}L_{m,n} - {}^{\dagger}_{t}L_{m,n} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Zusätze.

1) Zu demselben Resultate gelangt man auch direct durch folgende Betrachtung:

Nehmen wir an, daß $P_m . P_n$ Paare gleichzeitig sich bei einer Versicherung der angeführten Art betheiligen, so ist die Anzahl der im Laufe des

1ten, 2ten, ... tten

Jahres aufgelösten Paare der Reihe nach:

$$P_m . P_n - P_{m+1} . P_{n+1}, \; P_{m+1} . P_{n+1} - P_{m+2} . P_{n+2}, \; \ldots .$$
$$P_{m+t-1} . P_{n+t-1} - P_{m+t} . P_{n+t},$$

folglich, wenn die Zahlungen der Bank je an das Ende des Jahres gesetzt werden, der Baarwerth derselben:

$$= K\left(\frac{P_m . P_n - P_{m+1} . P_{n+1}}{1{,}0p} + \frac{P_{m+1} . P_{n+1} - P_{m+2} . P_{n+2}}{1{,}0p^2} + \ldots\ldots\right.$$
$$\left. + \frac{P_{m+t-1} . P_{n+t-1} - P_{m+t} . P_{n+t}}{1{,}0p^t}\right)$$

$$= K\left[\left(\frac{P_m . P_n}{1{,}0p} + \frac{P_{m+1} . P_{n+1}}{1{,}0p^2} + \ldots + \frac{P_{m+t-1} . P_{n+t-1}}{1{,}0p^t}\right) - \right.$$
$$\left.\left(\frac{P_{m+1} . P_{n+1}}{1{,}0p} + \frac{P_{m+2} . P_{n+2}}{1{,}0p^2} + \ldots + \frac{P_{m+t} . P_{n+t}}{1{,}0p^t}\right)\right]$$

$$= K . 1{,}0p^m\left[\frac{1}{1{,}0p}\left(\mathfrak{p}_m . P_n + \mathfrak{p}_{m+1} . P_{n+1} + \ldots + \mathfrak{p}_{m+t-1} . P_{n+t-1}\right) - \right.$$
$$\left.\left(\mathfrak{p}_{m+1} . P_{n+1} + \mathfrak{p}_{m+2} . P_{n+2} + \ldots + \mathfrak{p}_{m+t} . P_{n+t}\right)\right]$$

$$= K . 1{,}0p^m\left[\frac{1}{1{,}0p}\left(\Sigma(\mathfrak{p}_m . P_n) - \Sigma(\mathfrak{p}_{m+t} . P_{n+t})\right) - \right.$$
$$\left.\left(\Sigma(\mathfrak{p}_{m+1} . P_{n+1}) - \Sigma(\mathfrak{p}_{m+t+1} . P_{n+t+1})\right)\right]$$

$$= K . 1{,}0p^m\left[\frac{\Sigma(\mathfrak{p}_m . P_n) - \Sigma(\mathfrak{p}_{m+t} . P_{n+t})}{1{,}0p} - \right.$$
$$\left.\left(\Sigma(\mathfrak{p}_m . P_n) - \Sigma(\mathfrak{p}_{m+t} P_{n+t}) - \mathfrak{p}_m . P_n + \mathfrak{p}_{m+t} . P_{n+t}\right)\right]$$

$$= K . 1{,}0p^m\left[\mathfrak{p}_m . P_n - \mathfrak{p}_{m+t} . P_{n+t}\right.$$
$$\left. - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\left(\Sigma(\mathfrak{p}_m . P_n) - \Sigma(\mathfrak{p}_{m+t} . P_{n+t})\right)\right] \ldots . (2)$$

Die baare **Einnahme** ist dagegen

$$= P_m . P_n . {}_{(t)}\overset{+}{L}_{m,n} \ldots\ldots\ldots . (3).$$

Man erhält somit aus (2) und (3):

$${}_{(t)}\overset{+}{L}_{m,n} = \frac{K}{\mathfrak{p}_m . P_n}\left[\mathfrak{p}_m . P_n - \mathfrak{p}_{m+t} . P_{n+t}\right.$$
$$\left. - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\left(\Sigma(\mathfrak{p}_m . P_n) - \Sigma(\mathfrak{p}_{m+t} . P_{n+t})\right)\right]$$
$$= K\left[1 - \frac{\mathfrak{p}_{m+t} . P_{n+t}}{\mathfrak{p}_m . P_n}\right.$$
$$\left. - \frac{0{,}0p}{1{,}0p} \cdot \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_m . P_n) - \Sigma(\mathfrak{p}_{m+t} . P_{n+t})}{\mathfrak{p}_m . P_n}\right] \ldots\ldots (4),$$

oder nach §. 54:

$$_{(t)}^{+}L_{m,n} = K\left[1 - \frac{\mathfrak{p}_{m+t}\,.\,P_{n+t}}{\mathfrak{p}_m\,.\,P_n} - \frac{0,0p}{1,0p}\,.\,{}_{(t)}^{k'}\varrho_{m,n}\right] \ldots\ldots (5).$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (6) des §. 54 geht diese Gleichung über in:

$$_{(t)}^{+}L_{m,n} = K\left[1 - \frac{\mathfrak{p}_{m+t}\,.\,P_{n+t}}{\mathfrak{p}_m\,.\,P_n} - \frac{0,0p}{1,0p}\left({}^{k'}\varrho_{m,n} - {}_t^{k'}\varrho_{m,n}\right)\right]$$

$$= K\left[\left(1 - \frac{0,0p}{1,0p}\,.\,{}^{k'}\varrho_{m,n}\right) - \left(\frac{\mathfrak{p}_{m+t}\,.\,P_{n+t}}{\mathfrak{p}_m\,.\,P_n} - \frac{0,0p}{1,0p}\,.\,{}_t^{k'}\varrho_{m,n}\right)\right],$$

oder nach §. 74 (4) und §. 78 (4) in die schon oben gefundene Gleichung

$$_{(t)}^{+}L_{m,n} = {}^{+}L_{m,n} - {}_t^{+}L_{m,n}.$$

2) Da der baare Werth der während dieser t Jahre praenumerando zu leistenden Prämie $_{(t)}^{+}L'_{m,n}$ dem Baarwerthe einer vorschüssigen temporären Verbindungsrente auf t Jahre gleichkommt, weil diese innerhalb der t Jahre bis zum Tode des Zuerststerbenden bezogen, wie die Prämie nur ebenso lange bezahlt wird, so ist

$$_{(t)}^{+}L'_{m,n}\,.\,{}_{(t)}'\varrho_{m,n} = {}_{(t)}^{+}L_{m,n},$$

also

$$_{(t)}^{+}L'_{m,n} = \frac{_{(t)}^{+}L_{m,n}}{_{(t)}'\varrho_{m,n}} \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Beispiel.

Eine 83- und eine 80jährige Person versichern ihr Leben auf ein Kapital von 8000 Mk. temporär auf 5 Jahre zu Gunsten der Längerlebenden. Welche baare Einlage ist zu machen, wenn 4prozentige Zinsen berechnet werden?

Auflösung.

Nach Gleichung (1) wird

$$_{(5)}^{+}L'_{83.80} = {}^{+}L_{83.80} - {}_5^{+}L_{83.80}.$$

Nun ist aber nach §. 74 (4)

$$^{+}L_{83.80} = 8000\left(1 - \frac{0,04}{1,04}\,.\,{}^{k'}\varrho_{83.80}\right)$$

oder da

$$\frac{0,04}{1,04}\,.\,{}^{k'}\varrho_{83.80} = \frac{0,04}{1,04\,.\,\mathfrak{p}_{83}\,.\,P_{80}}\,\Sigma(\mathfrak{p}_{83}\,.\,P_{80})$$

$$= \frac{0{,}04}{1{,}04 \, . \, 0{,}9256510 \, . \, 37} (0{,}9256510 \, . \, 37 + 0{,}7417077 \, . \, 32 + 0{,}6062034 \, . \, 28 + 0{,}4800253 \, . \, 24 + 0{,}3956254 \, . \, 20 + 0{,}3170075 \, . \, 17 + 0{,}2438519 \, . \, 14 + 0{,}1758548 \, . \, 12 + 0{,}1409093 \, . \, 10 + 0{,}1083918 \, . \, 8 + 0{,}0781671 \, . \, 6 + 0{,}0501071 \, . \, 5 + 0{,}0240900 \, . \, 4)$$

$$= \frac{0{,}04}{1{,}04 \, . \, 0{,}9256510 \, . \, 37} (34{,}2490870 + 23{,}7346464 + 16{,}9736952 + 11{,}5206072 + 7{,}9125080 + 5{,}3891275 + 3{,}4139266 + 2{,}1102576 + 1{,}4090930 + 0{,}8671344 + 0{,}4690026 + 0{,}2505355 + 0{,}0963600)$$

$$= \frac{0{,}04 \, . \, 108{,}3959810}{1{,}04 \, . \, 0{,}9256510 \, . \, 37} = 0{,}121728;$$

$$^{\dagger}L_{83.80} = 8000(1 - 0{,}121728) = 7026{,}176.$$

Ferner ist nach dem Beispiele zu §. 78:

$$^{\dagger}_{5}L_{83.80} = 1132{,}994$$

und es folgt somit:

$$_{(5)}^{\dagger}L_{83.80} = 7026{,}176 - 1132{,}994 = 5893{,}182 \text{ Mk.}$$

ε) Temporäre Lebensversicherung auf den Zuletztsterbenden.

§. 80. Aufgabe.

Eine m- und eine njährige Person sichern den Erben der von beiden zuletztsterbenden ein Kapital K, das aber nur dann zur Auszahlung kommt, wenn beide Personen innerhalb der ersten t Jahre sterben. Wie groß ist der baare Versicherungswerth $^{\dagger\dagger}_{(t)}L_{m,n}$?

Auflösung.

Nehmen wir an, die beiden Personen hätten ihr Leben auf die zuletztsterbende überhaupt versichert, so wäre der Baarwerth ausgedrückt durch

$$^{\dagger\dagger}L_{m,n}.$$

Da aber das Kapital **nicht** ausbezahlt wird, wenn eine derselben, oder auch beide die t Jahre überleben, so ist hierin der Baarwerth einer um t Jahre aufgeschobenen Versicherung zu viel enthalten. Dieser ist aber ausgedrückt durch

$$^{\dagger}_{t}L_{m,n},$$

und man erhält daher für den verlangten Versicherungswerth

$$^{\dagger\dagger}_{(t)}L_{m,n} = {}^{\dagger\dagger}L_{m,n} - {}^{\dagger}_{t}L_{m,n} \quad \ldots\ldots \; (1),$$

oder nach §. 76 (1):

$$\overset{\dagger\dagger}{\underset{(t)}{}}L_{m,n} = L_m + L_n - {}^{\dagger}L_{m,n} - \overset{\dagger}{\underset{t}{}}L_{m,n} \ldots (2).$$

Beispiel.

Eine 83- und eine 80jährige Person sichern den Erben der von ihnen zuletztsterbenden ein Kapital von 8000 Mk., das jedoch nur dann zur Auszahlung kommt, wenn beide innerhalb der ersten 5 Jahre sterben. Wie groß ist der baare Werth dieser Versicherung bei Annahme eines 4prozentigen Zinsfußes?

Auflösung.

Nach Gleichung (1) folgt:

$$\overset{\dagger\dagger}{\underset{(5)}{}}L_{83,80} = {}^{\dagger\dagger}L_{83,80} - \overset{\dagger}{\underset{5}{}}L_{83,80}.$$

Nun ist aber nach §. 76 (4)

$$\begin{aligned} {}^{\dagger\dagger}L_{83,80} &= 8000\left(1 - \frac{0{,}04}{1{,}04}\,{}''\varrho_{83,80}\right) \\ &= 8000\left[1 - \frac{0{,}04}{1{,}04}({}'\varrho_{83} + {}'\varrho_{80} + {}^{k'}\varrho_{83,80})\right] \end{aligned}$$

oder da

$$'\varrho_{83} = \frac{\Sigma\mathfrak{p}_{83}}{\mathfrak{p}_{83}} = \frac{4{,}2875923}{0{,}9256510} = 4{,}631973$$

$$'\varrho_{80} = \frac{\Sigma\mathfrak{p}_{80}}{\mathfrak{p}_{80}} = \frac{8{,}3508594}{1{,}6052315} = 5{,}20228\cdot$$

und nach dem Beispiele zu §. 79

$${}^{k'}\varrho_{83,80} = \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{83}\,.\,P_{80})}{\mathfrak{p}_{83}\,.\,P_{80}} = \frac{108{,}395981}{34{,}249087} = 3{,}16493$$

ist, auch:

$$\begin{aligned} L_{83,80} &= 8000\left[1 - \frac{0{,}04}{1{,}04}(4{,}631973 + 5{,}20228 - 3{,}16493)\right] \\ &= 8000\left(1 - \frac{0{,}04\,.\,6{,}669323}{1{,}04}\right) = 5947{,}89. \end{aligned}$$

Ferner folgt aus dem Beispiele zu §. 79:

$$\overset{\dagger}{\underset{5}{}}L_{83,80} = 1132{,}994$$

und es ist demnach

$$\overset{\dagger\dagger}{\underset{5}{}}L_{83,80} = 5947{,}896 - 1132{,}994 = 4814{,}902 \text{ Mk.}$$

ζ) Versicherung auf Ueberlebung.

§. 81. Aufgabe.

Ein mjähriger Mann sichert nach seinem Tode

seiner njährigen Ehefrau ein Kapital K; wie groß ist der baare Werth $L_{m}{}^{\dagger}{}_{,n}$ dieser Ueberlebungsversicherung?

Auflösung.

Nehmen wir an, daß gleichzeitig $P_m . P_n$ solcher Paare sich betheiligt haben, so sind von diesen nach einem Jahre

$$(P_m - P_{m+1})\,P_n$$

Männer und von den $(P_m - P_{m+1})P_n$ Wittwen

$$(P_m - P_{m+1})\,(P_n - P_{n+1})$$

gestorben.

Setzen wir nun voraus, die eine Hälfte der Frauen sei vor den zugehörigen Männern, die andere Hälfte nach denselben gestorben, so ist die Leistung der Bank nach dem ersten Jahre

$$= K[(P_m - P_{m+1})P_n - \tfrac{1}{2}(P_m - P_{m+1})(P_n - P_{n+1})]$$

$$= K(P_m - P_{m+1})[P_n - \tfrac{1}{2}(P_n - P_{n+1})]$$

$$= \frac{K}{2}(P_m - P_{m+1})(P_n + P_{n+1}).$$

Im Anfang des zweiten Jahres leben noch

$$P_{m+1} . P_{n+1}$$

Paare. Von diesen sterben im Laufe des zweiten Jahres

$$(P_{m+1} - P_{m+2})\,P_{n+1}$$

Männer und von den diesen angehörigen Frauen dagegen

$$(P_{m+1} - P_{m+2})\,(P_{n+1} - P_{n+2}).$$

Die Leistung der Bank ist demnach am Ende des zweiten Jahres unter der vorhin in Bezug auf das Absterben gemachten Voraussetzung

$$= K[(P_{m+1} - P_{m+2})P_{n+1} - \tfrac{1}{2}(P_{m+1} - P_{m+2})(P_{n+1} - P_{n+2})]$$

$$= K(P_{m+1} - P_{m+2})\,[P_{n+1} - \tfrac{1}{2}(P_{n+1} - P_{n+2})]$$

$$= \frac{K}{2}(P_{m+1} - P_{m+2})(P_{n+1} + P_{n+2}).$$

Ganz analog findet man, daß die Leistung der Bank am Ende des dritten Jahres

$$= \frac{K}{2}(P_{m+2} - P_{m+3})(P_{n+2} + P_{n+3}),$$

am Ende des vierten Jahres

$$= \frac{K}{2}(P_{m+3}-P_{m+4})\,(P_{n+3}+P_{n+4}) \text{ u. s. w.}$$

wird.

Der Baarwerth der Bankleistung ist somit

$$= \frac{K}{2}\Big[\frac{(P_m-P_{m+1})\,(P_n+P_{n+1})}{1{,}0p}+\frac{(P_{m+1}-P_{m+2})(P_{n+1}+P_{n+2})}{1{,}0p^2}+$$
$$\frac{(P_{m+2}-P_{m+3})\,(P_{n+2}+P_{n+3})}{1{,}0p^3}+\ldots\Big]$$

$$= \frac{K}{2}\Big[\frac{P_m\,.\,P_n+P_m\,.\,P_{n+1}-P_{m+1}\,.\,P_n-P_{m+1}.P_{n+1}}{1{,}0p}+$$
$$\frac{P_{m+1}\,.\,P_{n+1}+P_{m+1}\,.\,P_{n+2}-P_{m+2}\,.\,P_{n+1}-P_{m+2}\,.\,P_{n+2}}{1{,}0p^2}+$$
$$\frac{P_{m+2}.P_{n+2}+P_{m+2}.P_{n+3}-P_{m+3}.P_{n+2}-P_{m+3}.P_{n+3}}{1{,}0p^3}+\ldots\Big]$$

$$= \frac{K}{2}\Big[\frac{P_m\,.\,P_n}{1{,}0p}+\frac{P_{m+1}\,.\,P_{n+1}}{1{,}0p^2}+\frac{P_{m+2}\,.\,P_{n+2}}{1{,}0p^3}+\ldots$$
$$+\frac{P_m\,.\,P_{n+1}}{1{,}0p}+\frac{P_{m+1}\,.\,P_{n+2}}{1{,}0p^2}+\frac{P_{m+2}\,.\,P_{n+3}}{1{,}0p^3}+\ldots$$
$$-\Big(\frac{P_{m+1}\,.\,P_n}{1{,}0p}+\frac{P_{m+2}\,.\,P_{n+1}}{1{,}0p^2}+\frac{P_{m+3}\,.\,P_{n+2}}{1{,}0p^3}+\ldots\Big)$$
$$-\Big(\frac{P_{m+1}.P_{n+1}}{1{,}0p}+\frac{P_{m+2}.P_{n+2}}{1{,}0p^2}+\frac{P_{m+3}.P_{n+3}}{1{,}0p^3}+\ldots\Big)\Big]$$

$$= \frac{K}{2}\Big[1{,}0p^{m-1}\Big(\mathfrak{P}_m\,.\,P_n+\mathfrak{P}_{m+1}.P_{n+1}+\mathfrak{P}_{m+2}.P_{n+2}+\ldots\Big)$$
$$+\;1{,}0p^{m-1}\;\Big(\mathfrak{P}_m\,.\,P_{n+1}+\mathfrak{P}_{m+1}.P_{n+2}+\mathfrak{P}_{m+2}.P_{n+3}+\ldots\Big)$$
$$-\;1{,}0p^m\Big(\mathfrak{P}_{m+1}.P_n+\mathfrak{P}_{m+2}.P_{n+1}+\mathfrak{P}_{m+3}.P_{n+2}+\ldots\Big)$$
$$-\;1{,}0p^m\Big(\mathfrak{P}_{m+1}.P_{n+1}+\mathfrak{P}_{m+2}.P_{n+2}+\mathfrak{P}_{m+3}.P_{n+3}+\ldots\Big)\Big]$$

$$= \frac{1{,}0p^m\,.\,K}{2}\Big[\frac{1}{1{,}0p}\Sigma(\mathfrak{P}_m\,.\,P_n)+\frac{1}{1{,}0p}\Sigma(\mathfrak{P}_m\,.\,P_{n+1})-$$
$$\Sigma(\mathfrak{P}_{m+1}.P_n)-\Sigma(\mathfrak{P}_{m+1}.P_{n+1})\Big]\;\ldots\ldots\;(1).$$

Da aber die baare Einnahme der Bank

$$= P_m\,.\,P_n\,.\,L_{m+,n}\;\ldots\ldots\ldots\;(2)$$

ist, so erhält man durch Gleichsetzung der Ausdrücke (1) und (2) für den Baarwerth

$$L_{m+,n} = \frac{1{,}0p^m . K}{2P_m . P_n}\left[\frac{1}{1{,}0p}\Sigma(\mathfrak{p}_m . P_n) + \frac{1}{1{,}0p}\Sigma(\mathfrak{p}_m . P_{n+1}) - \Sigma(\mathfrak{p}_{m+1} . P_n) - \Sigma(\mathfrak{p}_{m+1} . P_{n+1})\right]$$

$$= \frac{K}{2\mathfrak{p}_m . P_n}\left[\frac{1}{1{,}0p}\Sigma(\mathfrak{p}_m . P_n) + \frac{1}{1{,}0p}\Sigma(\mathfrak{p}_m . P_{n+1}) - \Sigma(\mathfrak{p}_{m+1} . P_n) - \Sigma(\mathfrak{p}_{m+1} . P_{n+1})\right]$$

$$= \frac{K}{2}\left[\frac{1}{1{,}0p} . \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_m . P_n)}{\mathfrak{p}_m . P_n} + \frac{1}{1{,}0p} . \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_m . P_{n+1})}{\mathfrak{p}_m . P_n} - \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{m+1} . P_n)}{\mathfrak{p}_m . P_n} - \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{m+1} . P_{n+1})}{\mathfrak{p}_m . P_n}\right] \ldots\ldots\ldots (3).$$

Nun ist aber

$$\frac{\Sigma(\mathfrak{p}_m . P_n)}{\mathfrak{p}_m . P_n} = {}^{k'}\varrho_{m,n}$$

$$\frac{\Sigma(\mathfrak{p}_m . P_{n+1})}{\mathfrak{p}_m . P_n} = \frac{P_{n+1}}{P_n} . \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_m . P_{n+1})}{\mathfrak{p}_m . P_{n+1}} = \frac{P_{n+1}}{P_n} . {}^{k'}\varrho_{m,n+1}$$

$$= \frac{1{,}0p . \mathfrak{p}_{n+1}}{\mathfrak{p}_n} . {}^{k'}\varrho_{m,n+1}$$

$$\frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{m+1} . P_n)}{\mathfrak{p}_m . P_n} = \frac{\mathfrak{p}_{m+1}}{\mathfrak{p}_m} . \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{m+1} . P_n)}{\mathfrak{p}_{m+1} . P_n}$$

$$= \frac{\mathfrak{p}_{m+1}}{\mathfrak{p}_m} . {}^{k'}\varrho_{m+1,n}$$

$$\frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{m+1} . P_{n+1})}{\mathfrak{p}_m . P_n} = \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_m . \mathfrak{p}_n)}{\mathfrak{p}_m . \mathfrak{p}_n} - 1 = {}^{k'}\varrho_{m,n} - 1.$$

Führt man diese Werthe der Reihe nach in die Gleichung (3) ein, so geht dieselbe über in:

$$L_{m+,n} = \frac{K}{2}\left[\frac{1}{1{,}0p} . {}^{k'}\varrho_{m,n} + \frac{\mathfrak{p}_{n+1}}{\mathfrak{p}_n} . {}^{k'}\varrho_{m,n+1} - \frac{\mathfrak{p}_{m+1}}{\mathfrak{p}_m} . {}^{k'}\varrho_{m+1,n} - {}^{k'}\varrho_{m,n} + 1\right]$$

$$= \frac{K}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{1{,}0p}\right) . {}^{k'}\varrho_{m,n} + \frac{\mathfrak{p}_{n+1}}{\mathfrak{p}_n} . {}^{k'}\varrho_{m,n+1} - \frac{\mathfrak{p}_{m+1}}{\mathfrak{p}_m} . {}^{k'}\varrho_{m+1,n}\right]$$

$$= \frac{K}{2}\left[1 - \frac{0{,}0p}{1{,}0p} . {}^{k'}\varrho_{m,n} + \frac{\mathfrak{p}_{n+1}}{\mathfrak{p}_n} . {}^{k'}\varrho_{m,n+1} - \frac{\mathfrak{p}_{m+1}}{\mathfrak{p}_m} . {}^{k'}\varrho_{m+1,n}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

§. 82. Zusätze.

1) Um die praenumerando zu machende Einlage, welche so lange bezogen wird, als das Ehepaar noch vollständig am Leben ist, zu erhalten, hat man den eben gefundenen Baarwerth durch den Baarwerth einer von beiden Personen auf das kürzeste Leben (vorschüssig) bezogenen Verbindungsrente = 1 zu dividiren.

Denn bezeichnet $L'_{m+,n}$ die Jahresprämie, so muß die Gleichung bestehen

$$L'_{m+,n} \,.\, {}^{k'}\varrho_{m,n} = L_{m+,n},$$

woraus folgt:

$$L'_{m+,n} = \frac{L_{m+,n}}{{}^{k'}\varrho_{m,n}} \;\ldots\ldots\ldots\; (5).$$

2) Soll die Versicherungssumme nur dann zur Auszahlung kommen, wenn der Mann innerhalb der ersten t Jahre gestorben ist, ist also die Ueberlebungsversicherung eine temporäre, so wird der Baarwerth erhalten, wenn man in der Gleichung (4) von jedem der drei letzten Glieder der rechten Seite eine, den betreffenden Altersverbindungen entsprechende, um t Jahre aufgeschobene Lebensversicherung subtrahirt.

Beispiel.

Ein 88jähriger Ehemann will nach seinem Tode seiner 85jährigen Frau ein Kapital von 8000 Mk. sichern; wie groß ist die baar zu machende Einlage, wenn 4prozentige Zinsen in Rechnnng gebracht werden?

Auflösung.

Nach Gleichung (4) ist

$$L_{88+,85} = \frac{8000}{2}\left[1 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \,.\, {}^{k'}\varrho_{88.85} + \frac{\mathfrak{p}_{86}}{\mathfrak{p}_{85}} \,.\, {}^{k'}\varrho_{88.86} - \frac{\mathfrak{p}_{89}}{\mathfrak{p}_{88}} \,.\, {}^{k'}\varrho_{89.85}\right].$$

Nun ist aber nach dem Beispiele zu §. 74

$$\frac{0{,}04}{1{,}04} \, {}^{k'}\varrho_{88.85} = 0{,}099945,$$

ferner wird:

$$\frac{\mathfrak{p}_{86}}{\mathfrak{p}_{85}} \,.\, {}^{k'}\varrho_{88.88} = \frac{\mathfrak{p}_{88}}{\mathfrak{p}_{85}} \,.\, \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{88} \,.\, P_{88})}{\mathfrak{p}_{88} \,.\, P_{86}} = \frac{\mathfrak{p}_{86}}{\mathfrak{p}_{85}} \,.\, \frac{\Sigma(P_{88} \,.\, \mathfrak{p}_{88})}{P_{88} \,.\, \mathfrak{p}_{86}}$$

$$= \frac{\Sigma(P_{88} \,.\, \mathfrak{p}_{88})}{\mathfrak{p}_{85} \,.\, P_{88}}$$

$$= \frac{1}{0{,}6062034 \,.\, 10}(10 \,.\, 0{,}4800253 + 8 \,.\, 0{,}3956254 +$$

$$6.0{,}3170075 + 5.0{,}2438519 + 4.0{,}1758548 + 3.0{,}1409093 + 2.0{,}1083918 + 1.0{,}0781671)$$

$$= \frac{1}{6{,}062034}(4{,}8002530 + 3{,}1650032 + 1{,}9020450 + 1{,}2192595 + 0{,}7034192 + 0{,}4227279 + 0{,}2167836 + 0{,}0781671)$$

$$= \frac{12{,}5076585}{6{,}062034} = 2{,}063276$$

$$\frac{\mathfrak{p}_{89}}{\mathfrak{p}_{88}} \cdot {}^{k\prime}\!\dot{e}_{89.85} = \frac{\mathfrak{p}_{89}}{\mathfrak{p}_{88}} \cdot \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{89} \cdot P_{85})}{\mathfrak{p}_{89} \cdot P_{85}} = \frac{\Sigma(\mathfrak{p}_{89} \cdot P_{85})}{\mathfrak{p}_{88} \cdot P_{85}}$$

$$= \frac{1}{0{,}3170075 \,.\, 17}(0{,}2438519 \,.\, 17 + 0{,}1758548 \,.\, 14 + 0{,}1409093 \,.\, 12 + 0{,}1083918 \,.\, 10 + 0{,}0781671 \,.\, 8 + 0{,}0501071 \,.\, 6 + 0{,}0240900 \,.\, 5)$$

$$= \frac{1}{5{,}3891275}(4{,}1454823 + 2{,}4619672 + 1{,}6909116 + 1{,}0839180 + 0{,}6253368 + 0{,}3006426 + 0{,}1204500)$$

$$= \frac{10{,}4287085}{5{,}3891275} = 1{,}935138.$$

Folglich wird

$$L_{88\dagger,85} = 4000(1 - 0{,}099945 + 2{,}063276 - 1{,}935138) = 4000 \,.\, 1{,}028193 = 4112{,}772 \text{ Mk.}$$

§. 83. Aufgaben zur Uebung.

1) Eine 65 jährige Person versichert ihr Leben auf ein Kapital von 3000 Mk.; welche baare Einlage hat dieselbe an die Versicherungsanstalt zu machen, wenn 3 prozentige Zinsen berechnet werden?

2) Welches Kapital sichert eine 85 jährige Person ihren Erben, wenn dieselbe gegenwärtig in eine Lebensversicherungsanstalt 4992,53 Mk. einzahlt und diese vierprozentige Zinsen in Rechnung bringt?

3) Eine 40 jährige Person versichert ihr Leben auf ein Kapital von 10000 Mk., welche Prämie hat dieselbe lebenslänglich praenumerando an die Versicherungsanstalt zu entrichten, wenn diese 3 prozentige Zinsen in Rechnung bringt?

4) Eine 85 jährige Person zahlt lebenslänglich zu Anfang eines jeden Jahres 192,9 Mk. in eine Lebensversicherungsanstalt. Welches Kapital erhalten die Erben der versicherten

Person nach dem Tode derselben ausbezahlt, wenn der Berechnung ein 4prozentiger Zinsfuß zu Grunde gelegt wird?

5) Eine 56jährige Person sichert ihren Erben ein Kapital von 12000 Mk., das denselben aber nur in dem Falle ausbezahlt wird, wenn die versicherte Person nicht innerhalb der ersten 9 Jahre stirbt. Wie groß ist die zu machende baare Einlage, wenn 3prozentige Zinsen berechnet werden?

6) Welches Kapital sichert eine 70jährige Person ihren Erben mit einer baaren Einlage von 3000 Mk., wenn das Kapital nur dann zur Auszahlung kommt, im Falle die versicherte Person nicht innerhalb der ersten 15 Jahre stirbt und 4prozentige Zinsen in Anschlag gebracht werden?

7) Wie groß ist in Aufgabe 5 die zu entrichtende Prämie, wenn alle Angaben dieselben bleiben?

8) Eine 64jährige Person versichert ihr Leben auf 6000 Mk., welche den Erben jedoch nur ausbezahlt werden, im Falle die versicherte Person im Laufe der ersten 12 Jahre stirbt. Wie groß ist der baare Versicherungswerth bei 3prozentigem Zinsenansatze?

9) Eine 80jährige Person hat mit einer baaren Einlage von 5970,65 Mk. ihren Erben ein Kapital unter der Bedingung gesichert, daß sie innerhalb der ersten 5 Jahre stirbt; wie groß ist diese versicherte Summe, wenn 4proz. Zinsen in Anrechnung kommen?

10) Welche Prämie hat die Person in Aufgabe 8 der Anstalt zu entrichten, wenn alle Angaben dieselben bleiben?

11) Eine 80jährige Person zahlt praenumerando in eine Lebensversicherungsanstalt $624\frac{4}{5}$ Mk. während 5 Jahre oder im Falle sie innerhalb dieser Zeit stirbt, bis zu ihrem Tode. Welches Kapital sichert sie dadurch ihren Erben, wenn solches nicht ausbezahlt wird, im Falle sie länger als 5 Jahre lebt und 4% Zinsen berechnet werden?

12) Eine 70- und eine 87jährige Person versichern ihr Leben in der Weise, daß der einen nach dem Tode der anderen ein Kapital von 5000 Mk. ausbezahlt wird. Wie groß ist der baare Werth dieser Versicherung bei Berechnung 3prozentiger Zinsen?

13) Eine 85- und eine 88jährige Person haben in eine Lebensversicherungsanstalt eine baare Einlage von 5400 Mk. gemacht, wofür die eine nach dem Tode der anderen ein Kapital

ausbezahlt bekommt. Wie groß ist dieses, bei Zugrundelegung eines 4 prozentigen Zinsfußes?

14) Welche Prämie haben in Aufgabe 12 die beiden Personen praenumerando an die Anstalt jährlich bis zum eintretenden Todesfalle zu entrichten, wenn alle Angaben dieselben bleiben?

15) Eine 85- und eine 88 jährige Person zahlen so lange sie zusammen leben praenumerando eine Prämie von 3463,48 Mk. Welches Kapital erhält die eine Person nach dem Tode der anderen, wenn 4 prozentige Zinsen berechnet werden?

16) Eine 70- und eine 87 jährige Person sichern den Erben der von ihnen zuletzt sterbenden ein Kapital von 10000 Mk.; wie groß ist der baare Versicherungswerth, wenn die Zinsen zu 3 % berechnet werden?

17) Eine 85- und eine 88 jährige Person sichern durch eine baare Einlage von 3182¼ Mk. den Erben der von ihnen zuletzt sterbenden welches Kapital, wenn bei der Berechnung 4 % Zinsen angesetzt werden?

18) Welche Prämie ist praenumerando α) bis zum Tode der zuerststerbenden, β) bis zum Tode der zuletztsterbenden Person zu entrichten, wenn in Aufgabe 16 die Angaben unverändert bleiben?

19) Eine 85- und eine 88 jährige Person zahlen so lange sie zusammen leben jährlich praenumerando eine Prämie von 306½ Mk. Welches Kapital erhält die länger lebende nach dem Tode der anderen, wenn ein 4 prozentiger Zinsfuß berechnet wird?

20) Wenn in vorhergehender Aufgabe eine Prämie von 149,7 Mk. so lange bezahlt wird, als noch eine der beiden Personen lebt, welches Kapital erhalten alsdann die Erben der zuletzt sterbenden Person nach deren Tod?

21) Eine 64- und eine 81 jährige Person versichern ihr Leben in der Weise, daß die Bank nach dem Tode der einen der anderen ein Kapital von 12000 Mk. einzuhändigen hat, wenn der Todesfall nicht innerhalb der ersten 6 Jahre eintritt. Was ist der baare Versicherungswerth bei Berechnung 3 prozentiger Zinsen?

22) Eine 88- und eine 85jährige Person haben mit einer baaren Einlage von 1095,55 Mk. ihr Leben in der Weise versichert, daß der einen nach dem Tode der anderen ein Kapital von der Versicherungsanstalt ausbezahlt wird, im Falle der Tod nicht innerhalb der ersten 4 Jahre erfolgt. Wie groß ist dieses Kapital, wenn dem Zinsfuße 4% zu Grunde gelegt werden?

23) Eine 64- und eine 81jährige Person versichern ihr Leben in der Weise, daß die eine nach dem Tode der anderen ein Kapital von 8000 Mk. erhält, wenn der Tod innerhalb der ersten 6 Jahre erfolgt. Wie groß ist der baare Werth dieser Versicherung bei 3% Zinsen?

24) Eine 64- und eine 81jährige Person sichern den Erben der zuletzt sterbenden ein Kapital von 18000 Mk., das aber nur dann zur Auszahlung kommt, wenn beide Personen innerhalb der ersten 6 Jahre sterben. Was ist der baare Versicherungswerth bei 3prozentiger Zinsenberechnung?

25) Ein 87jähriger Mann sichert seiner 70jährigen Frau nach seinem Tode ein Kapital von 6000 Mk.; wie groß ist die zu machende baare Einlage bei Berechnung 3prozentiger Zinsen?

Fünfter Abschnitt.

Von den höheren Gleichungen.

A. Einleitung.

§. 84. Von den Funktionen im Allgemeinen.

1) Hat eine Zahl keinen bestimmten Werth, sondern können derselben während einer Untersuchung alle möglichen Werthe beigelegt werden, so nennt man dieselbe veränderlich oder variabel, im anderen Falle dagegen beständig oder constant.

Die veränderlichen Zahlen werden gewöhnlich durch die letzten, die constanten durch die ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet.

2) Hängt der Werth einer Zahl von einer anderen in der Weise ab, daß jedem Werthe von dieser, ein bestimmter Werth von jener entspricht, so heißt die von der anderen abhängige Zahl eine Funktion derselben.

So ist z. B. in der Gleichung

$$y = 5x - 3$$

y eine Funktion von x; denn für jeden Werth von x innerhalb der Grenzen $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ ist der Werth von y bestimmt.

Ebenso sind bekanntlich $\sin x$, $\cos x$ u. s. w. Funktionen des Winkels, oder Bogens x.

Es ist klar, daß diese Beziehung eine gegenseitige ist und daß, wenn y eine Funktion von x ist, auch x eine Funktion von y sein muß.

3) Um die erwähnte Abhängigkeit zu kennzeichnen, setzt man gewöhnlich der veränderlichen Zahl einen der Buchstaben f, F, φ, ψ rc. vor und schreibt kurzhin:
$y = f(x)$ oder $y = F(x)$ oder $y = \varphi(x)$ rc. um anzudeuten, daß y eine Funktion von x sei, wo aber der Ausdruck f(x) irgend ein von x abhängiges Monom, Polynom rc. bedeutet.

4) Ist in einer Funktion die Veränderliche x mit den Constanten nur durch die vier Grundoperationen verbunden, oder erscheint sie als Basis von Potenzen mit constanten Exponenten, so heißt dieselbe eine algebraische, in jedem anderen Falle dagegen eine transcendente Funktion der Variabeln x.

So sind z. B.

$$x^3 + ax + b,$$
$$7x^5 + 3x^3 + 6x + 5,$$
$$ax^n - b\sqrt[5]{x^3} + x \log a$$

algebraische, dagegen

$$a^x + b,$$
$$a^m - b^{\log x},$$
$$c + d \cos x$$

transcendente Funktionen von x.

5) Eine algebraische Funktion ist entweder rational oder irrational, je nachdem in derselben die Veränderliche nur mit ganzen Potenzen, oder auch unter einem Wurzelzeichen oder, was damit übereinstimmt, mit gebrochenem Exponenten auftritt.

So ist z. B.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$$

eine rationale, dagegen

$$a^5 - \sqrt[4]{b + x^3} + x^{\frac{3}{5}}$$

eine irrationale Funktion von x.

§. 85. Stetige Funktionen.

1) Ist

$$y = f(x)$$

irgend eine Funktion der Veränderlichen x und man läßt x um eine Größe δ wachsen, so geht die Funktion über in

$$f(x + \delta)$$

und nimmt somit zu um

$$f(x + \delta) - f(x).$$

Wird nun innerhalb zweier Werthe von x, z. B. von $x = x_1$ bis $x = x_2$ für jeden Werth der Veränderlichen mit unendlich kleiner werdendem δ diese Differenz selbst unendlich klein, so sagt man, die Funktion sei innerhalb der Grenzen $x = x_1$ bis $x = x_2$ **stetig**.

Beispiel.

Ist

$$f(x) = \frac{a}{x}$$

die vorgelegte Funktion, welche auf ihre Stetigkeit untersucht werden soll, so hat man

$$f(x + \delta) = \frac{a}{x + \delta}$$

und $f(x + \delta) - f(x) = \frac{a}{x + \delta} - \frac{a}{x} = - \frac{a\delta}{x(x + \delta)}$.

Da nun dieser Ausdruck für alle Werthe von x fort und fort kleiner wird, wenn δ bis zur Null abnimmt, und nur für $x = 0$ in ∞ übergeht, so ist die vorgelegte Funktion **stetig** von $x = -\infty$ bis $x = 0$ und von $x = 0$ bis $x = +\infty$, dagegen **unstetig** und gleich ∞ für den besonderen Werth von $x = 0$.

§. 86. Erklärungen.

1) Die allgemeine Form einer geordneten, auf Null reducirten Gleichung vom nten Grade ist bekanntlich

$$x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0 \ldots (1)$$

wo $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-1}, A_n$

beliebige reelle oder imaginäre Coefficienten (die Null nicht ausgeschlossen) bezeichnen.

Anmerkung. Ist nämlich das die höchste Potenz von x enthaltende Glied mit einem von der Einheit verschiedenen Coefficienten behaftet, so kann dieser stets dadurch beseitigt werden, daß man die ganze Gleichung durch denselben dividirt. Dies rechtfertigt die Annahme, daß die vorstehende Form (1), in welcher dem ersten Gliede kein besonderer Coefficient beigegeben ist, eine völlig allgemeine sei.

2) Die linke Seite der Gleichung (1) nennt man deren **Polynom**. Man bezeichnet solches in der Regel durch f(x) und schreibt darum statt jener Gleichung kurzhin:

$$f(x) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

3) Jeder reelle, oder imaginäre Ausdruck, welcher für x ge-

setzt, das Gleichungspolynom auf **Null** reducirt, also obiger Gleichung Genüge leistet, heißt eine **Wurzel** eben dieser Gleichung.

So sind z. B. -1, 2 und 3 Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0.$$

Denn führt man der Reihe nach für x jene drei Werthe ein, so geht für jeden derselben die linke Seite in Null über.

4) Wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, werden wir in der Folge stets die Coefficienten

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-1}, A_n$$

der einzelnen Glieder des Gleichungspolynoms als **reell** voraussetzen, da die entgegengesetzte Annahme dem Zwecke des vorliegenden Werkchens durchaus ferne liegt.

5) Lassen wir in dem Gleichungspolynom x um δ zunehmen, so wird

$$f(x + \delta) = (x + \delta)^n + A_1 (x + \delta)^{n-1} + A_2 (x + \delta)^{n-2} + \ldots + A_{n-1} (x + \delta) + A_n \ldots\ldots (3)$$

oder wenn man die angedeuteten Potenzirungen nach dem binomischen (§. 15) Satze entwickelt:

$$\begin{aligned} f(x + \delta) = {} & x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\delta + \binom{n}{2} x^{n-2}\delta^2 + \ldots + \delta^n \\ & + A_1 \left[x^{n-1} + \binom{n-1}{1} x^{n-2}\delta + \binom{n-1}{2} x^{n-3}\delta^2 + \ldots + \delta^{n-1}\right] \\ & + A_2 \left[x^{n-2} + \binom{n-2}{1} x^{n-3}\delta + \binom{n-2}{2} x^{n-4}\delta^2 + \ldots + \delta^{n-2}\right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_{n-1} (x + \delta) + A_n \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} f(x + \delta) = {} & x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n \\ & + \delta \left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n-1}{1} A_1 x^{n-2} + \binom{n-2}{1} A_2 x^{n-3} + \ldots + A_{n-1}\right] \\ & + \delta^2 \left[\binom{n}{2} x^{n-2} + \binom{n-1}{2} A_1 x^{n-3} + \binom{n-2}{2} A_2 x^{n-4} + \ldots + A_{n-2}\right] \\ & + \delta^3 \left[\binom{n}{3} x^{n-3} + \binom{n-1}{3} A_1 x^{n-4} + \binom{n-2}{3} A_2 x^{n-5} + \ldots + A_{n-3}\right] \\ & + \ldots + \delta^{n-1} \left[\binom{n}{n-1} x + A_1\right] + \delta^n \ldots\ldots (4). \end{aligned}$$

Zur Abkürzung setzt man nun:

$$\left.\begin{array}{l}
x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_n = f(x) \\
\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n-1}{1}A_1x^{n-2} + \binom{n-2}{1}A_2x^{n-3} + \ldots + A_{n-1} = f_1(x) \\
\binom{n}{2}x^{n-2} + \binom{n-1}{2}A_1x^{n-3} + \binom{n-2}{2}A_2x^{n-4} + \ldots + A_{n-2} = f_2(x) \\
\binom{n}{3}x^{n-3} + \binom{n-1}{3}A_1x^{n-4} + \binom{n-2}{3}A_2x^{n-5} + \ldots + A_{n-3} = f_3(x) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\binom{n}{n-1}x + A_1 = n\,x + A_1 = f_{n-1}(x) \\
\binom{n}{n} = 1 = f_n(x)
\end{array}\right\} (5)$$

und nennt die Functionen

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots\ f_{n-1}(x),\ f_n(x),$$

deren Bildungsgesetz aus der jedesmal zunächst vorhergehenden Function aus vorstehender Darstellung klar ausgesprochen ist, die abgeleiteten oder derivirten Functionen.

Durch Einführung dieser Bezeichnungen in Gleichung (4) geht dieselbe über in:

$$f(x+\delta) = f(x) + \delta f_1(x) + \delta^2 f_2(x) + \delta^3 f_3(x) + \ldots + \delta^{n-1} f_{n-1}(x) + \delta^n f_n(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Um die Bildungsweise der abgeleiteten Funktionen noch an einem numerischen Beispiele zu erläutern, sei

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 4x + 3$$

das vorgelegte Gleichungspolynom.

Man erhält nach (5):

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 4x^3 - 5.3x^2 + 6.2x - 4 \\
&= 4x^3 - 15x^2 + 12x - 4 \\
f_2(x) &= \frac{4.3}{2}x^2 - \frac{15.2}{2}x + \frac{12}{2} \\
&= 6x^2 - 15x + 6 \\
f_3(x) &= \frac{6.2}{3}x - \frac{15}{3} \\
&= 4x - 5 \\
f_4(x) &= \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}$$

§. 87. Aufgaben zur Uebung.

Die abgeleiteten Functionen nachstehender Gleichungspolynomien zu bilden:

1) $x^3 + 5x^2 - 7x + 8$.
2) $x^3 - 10x^2 - 15x + 12$.
3) $x^4 + 8x^3 + 15x^2 + 17x + 20$.
4) $x^4 - 10x^2 + 16x - 40$.
5) $x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 17x^2 + 11x - 18$.
6) $x^6 + 12x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 10$.

B. Allgemeine Eigenschaften der höheren Gleichungen.

§. 88. Lehrsatz.

Das Gleichungspolynom
$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$
ist eine stetige Function von x.

Beweis.

Setzt man $x + \delta$ statt x in dem Polynom, so resultirt nach §. 86. 5 Gl. (6):
$$f(x+\delta) - f(x) = \delta f_1(x) + \delta^2 f_2(x) + \ldots + \delta^{n-1} f_{n-1}(x) + \delta^n f_n(x) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Nehmen wir nun zunächst an, die Functionen $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ seien sämmtlich positiv, so kann δ stets so klein angenommen werden, daß der absolute Werth von
$$\delta f_1(x) + \delta^2 f_2(x) + \ldots + \delta^{n-1} f_{n-1}(x) + \delta^n f_n(x)$$
kleiner wird, als jede noch so kleine Zahl α.

Denn bezeichnet g den größten der Werthe $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$, so wird offenbar
$$\delta f_1(x) + \delta^2 f_2(x) + \ldots + \delta^n f_n(x) < \alpha,$$
wenn
$$g(\delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots + \delta^n) < \alpha$$
oder nach Thl. I §. 200 (2), wenn
$$\frac{g\delta}{1-\delta}(1 - \delta^n) < \alpha$$
ist. Für $\delta < 1$ ist diese Ungleichheit aber erfüllt, sobald
$$\frac{g\delta}{1-\delta} < \alpha,$$
also
$$\delta < \frac{\alpha}{g+\alpha}$$
angenommen wird.

Sind einzelne der Functionen negativ, so gilt dieses Resultat nur um so eher. Da man nun α so klein annehmen, also die rechte Seite der Gleichung (1) der Null so nahe bringen kann, als man nur will, wenn man nur δ entsprechend der Null sich nähern läßt, so ist f(x) nach §. 85 eine *stetige* Function von x.

Zusätze.

1) Sind in dem Gleichungspolynom f(x) die Coefficienten, so wie x imaginär, so ist dasselbe dennoch stetig. Denn setzen wir

$$x = p + iq \text{ und } \delta = \varepsilon(r + is)$$

so nimmt obige Gl. (1) die Form an:

$$\begin{aligned} f(x+\delta) - f(x) &= \varepsilon(P_1 + iQ_1) + \varepsilon^2(P_2 + iQ_2) + \ldots \\ &= \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \ldots + i(\varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \ldots) \\ &= L + iM. \end{aligned}$$

Nun können aber nach Obigem L und M, also auch $L + iM$ beliebig klein gemacht werden, und somit ist f(x) nach §. 85 eine stetige Function von x.

2) Nimmt das Polynom f(x) verschiedene Zeichen an, wenn man in demselben $x = \alpha$ und $x = \beta$ setzt, so liegt zwischen α und β jedenfalls *ein* Werth, der für x gesetzt, die Function f(x) in *Null* überführt.

Denn wäre dieses nicht der Fall, so müßte die Function f(x) plötzlich von einem positiven Werthe in einen negativen überspringen, was unmöglich ist, da sie nach Obigem für alle Werthe von x stetig verläuft.

§. 89. Lehrsatz.

In dem Gleichungspolynom f(x) kann x immer so gewählt werden, daß der absolute Werth des ersten Gliedes x^n größer wird als die Summe aller folgenden Glieder.

Beweis.

Fassen wir die Coefficienten nur in Hinsicht ihres absoluten Werthes in's Auge und bezeichnet A_g den größten derselben, so ist offenbar

$$x^n > A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + A_3x^{n-3} + \ldots + A_n$$

sobald die Ungleichheit stattfindet:

$$x^n \gtreqless A_g x^{n-1} + A_g x^{n-2} + A_g x^{n-3} + \dots + A_g$$

oder

$$x^n \geqq A_g(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1)$$

oder nach Thl. I. §. 200 (2):

$$x^n \geqq A_g \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Diese Bedingung erfüllt aber

$$x = A_g + 1.$$

Denn für diesen Werth ergibt sich:

$$(A_g + 1)^n \geqq (A_g + 1)^n - 1$$

was unzweifelhaft richtig ist.

Es genügt ihr aber ganz allgemein:

$$x > A_g + 1,$$

oder

$$x = A_g + 1 + \alpha$$

wenn α irgend eine positive Zahl bedeutet; denn man erhält alsdann die jedenfalls richtige Ungleichung:

$$(A_g + 1 + \alpha)^n > \frac{(A_g + 1 + \alpha)^n - 1}{1 + \frac{\alpha}{A_g}}$$

Zusätze.

1) In dem Gleichungspolynom $f(x)$ kann man für x immer einen so großen positiven Werth annehmen, daß $f(x)$ positiv wird.

2) Ist der höchste Exponent von x in dem Gleichungspolynom ungerade, so kann man für x einen so großen negativen Werth annehmen, daß $f(x)$ negativ wird.

3) Vorstehende Sätze in Verbindung mit §. 88 Zus. 2 führen zu folgenden Schlüssen:

α) Ist der höchste Exponent der Gleichung

$$f(x) = 0$$

gerade, das letzte Glied negativ, so liegt sowohl zwischen 0 und $+\infty$ als auch zwischen 0 und $-\infty$ eine Wurzel derselben.

3) Ist der höchste Exponent ungerade, so liegt zwischen 0 und ∞ eine Wurzel der Gleichung, wenn das letzte Glied negativ ist, dagegen zwischen 0 und $-\infty$ eine Wurzel, wenn das letzte Glied positiv ist.

Anmerkung. Dieselben Resultate haben natürlich in analoger Weise auch dann noch Giltigkeit, wenn der Coefficient des ersten Gliedes des Polynoms eine von der Einheit verschiedene Zahl z. B. A_0 ist. Man hat alsdann nur $\frac{A_g}{A_0}$ statt A_g zu setzen

Beispiel.

Es sei

$$f(x) = x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 6x + 5$$

das gegebene Polynom.

Da unter den Coefficienten 6 der größte ist, so wird nach Obigem für

$$x = 6 + 1 = 7$$
$$x^5 > 4x^4 + 2x^3 + 6x + 5$$

Anmerkungen. 1) In vielen Fällen genügt aber auch ein kleinerer Werth von x, als der nach obiger Regel bestimmte. So erhält man in vorliegendem Falle die gewünschte Ungleichung schon für $x = 5$.

2) Befinden sich unter den Gliedern des Polynoms solche mit negativen Coefficienten, so findet die eben gemachte Bemerkung nur um so eher statt, So genügt z. B. in dem Polynom

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 7x + 3$$

schon der Werth $x = 4$, während nach obiger Regel $x = 8 + 1 = 9$ gefunden wird.

§. 90. Lehrsatz.

In dem Gleichungspolynom $f(x)$ kann x immer so klein gewählt werden, daß der absolute Werth irgend eines Gliedes $A_r x^{n-r}$ des Polynoms größer wird, als die Summe aller vorhergehenden Glieder.

Beweis.

Nach vorstehendem Satze soll sich x immer so bestimmen lassen, daß

$$A_r x^{n-r} > x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{r-1} x^{n-r+1} \quad (1)$$

oder, wenn man beiderseits durch x^n dividirt und

$$\frac{1}{x} = y$$

setzt, daß

$$A_r\, y^r > A_{r-1}\, y^{r-1} + A_{r-2}\, y^{r-2} + \ldots + A_2 y^2 + A_1 y + 1$$

oder

$$y^r > \frac{A_{r-1}}{A_r} y^{r-1} + \frac{A_{r-2}}{A_r} y^{r-2} + \ldots + \frac{A_2}{A_r} y^2 + \frac{A_1}{A_r} y + \frac{1}{A_r} \ldots (2)$$

wird.

Bezeichnet nun wieder dem absoluten Werthe nach A_g den größten der Coefficienten

$$A_{r-1},\ A_{r-2},\ \ldots\ A_2,\ A_1,\ 1,$$

so genügt nach §. 89 der vorstehenden Ungleichung (2):

$$y \geqq \frac{A_g}{A_r} + 1$$

oder

$$y \geqq \frac{A_g + A_r}{A_r},$$

also erfüllt die Ungleichung (1):

$$x = \frac{1}{y} \leqq \frac{1}{\frac{A_g + A_r}{A_r}}$$

oder

$$x \leqq \frac{A_r}{A_g + A_r}.$$

Beispiel.

Ist

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 2x^2,$$

so wird für

$$x \leqq \frac{2}{5+2} \text{ oder } x \leqq \frac{2}{7}:$$

$$x^4 + 5x^3 < 2x^2$$

Anmerkung. Vorstehender Lehrsatz gilt natürlich auch im Falle

$$r = n$$

wird, der Exponent von x also Null ist und das betreffende Glied in eine beliebige Zahl übergeht.

So folgt z. B., wenn

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 5x + 4$$

ist, daß für

$$x \leqq \frac{4}{8+4} \text{ oder } x \leqq \frac{1}{3}:$$

$$4 > x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 5x$$

wird.

Zusatz.

In dem Gleichungspolynome f(x) kann x immer so gewählt werden, daß das Polynom ein mit seinem letzten Gliede übereinstimmendes Zeichen annimmt, gleichgiltig ob dieses Glied die Veränderliche x enthält oder nicht.

§. 91. Lehrsatz.

Führt man in das Gleichungspolynom f(x) für

x der Reihe nach unmittelbar auf einander folgende Werthe ein und es ist dasselbe in der Nähe eines Werthes von $x = a$ im Wachsen, oder Abnehmen begriffen, so ist für eben diesen Werth von x die erste abgeleitete Function $f_1(x)$ bezüglich positiv, oder negativ.

Beweis.

Substituirt man $a + \delta$ statt x in das Gleichungspolynom $f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots. + A_{n-1} x + A_n$, so folgt nach §. 86 (6):

$$f(a + \delta) = f(a) + \delta f_1(a) + \delta^2 f_2(a) + \delta^3 f_3(a) + \ldots. + \delta^{n-1} f_{n-1}(a) + \delta^n f_n(a)$$

und hieraus:

$$f(a + \delta) - f(a) = \delta f_1(a) + \delta^2 f_2(a) + \delta^3 f_3(a) + \ldots. + \delta^{n-1} f_{n-1}(a) + \delta^n f_n(a) \ldots\ldots\ldots. (1).$$

Nun kann aber δ nach dem vorhergehenden Satze so klein genommen werden, daß der absolute Werth von $\delta f_1(a)$ größer ausfällt als der absolute Werth aller folgenden Glieder zusammen, oder daß das Zeichen der Differenz $f(a + \delta) - f(a)$ mit dem Zeichen von $\delta f_1(a)$ übereinstimmt.

Da nun δ positiv ist, so wird $f_1(a)$ positiv oder negativ sein, je nachdem bezüglich

$$f(a + \delta) \gtrless f(a)$$

ist.

Zusätze.

1) Läßt man in dem Gleichungspolynome $f(x)$ die Veränderliche x um einen sehr kleinen Werth δ zunehmen, so richtet sich das Resultat in Bezug auf das Zeichen lediglich nur nach dem Werthe der ersten abgeleiteten Function $f_1(x)$.

2) Je nachdem die erste abgeleitete Function $f_1(x)$ für $x = a$ positiv oder negativ ausfällt, ist das Gleichungspolynom $f(x)$ in der Nähe des Werthes für $x = a$ bezüglich im Zu-, oder Abnehmen begriffen.

Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt unmittelbar durch Umkehrung des obigen Lehrsatzes.

3) Führt man $-\delta$ statt δ in obige Gleichung (1) ein, so geht dieselbe über in:

$$f(a - \delta) - f(a) = - \delta f_1(a) + \delta^2 f_2(a) - \delta^3 f_3(a) + \ldots + (-1)^n \delta^n f_n(a) \ldots \ldots (2).$$

Nehmen wir nun an, es werde für $x = a$ das Polynom $f(x)$ Null, nicht aber $f_1(x)$, es sei also a eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = 0,$$

so ziehen wir aus der Vergleichung der beiden Gleichungen (1) und (2) in Verbindung mit Zus. 1. folgenden Schluß:

Das Gleichungspolynom $f(x)$ hat mit $f_1(x)$ das gleiche oder entgegengesetzte Zeichen, je nachdem man dasselbe unmittelbar nach oder vor dem Durchgange durch Null betrachtet.

§. 92. Lehrsatz.

Der Gleichung

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

genügt immer ein Werth von x von der Form $p_0 + iq_0$.

Beweis.

Bezeichnet man die Summen, deren Summanden erhalten werden, wenn man in dem Ausdrucke $a_t x^t$ der Reihe nach $t = 0, 1, 2, \ldots n$ setzt, kurzhin durch $\sum\limits_{t=0}^{t=n} a_t x^t$, so kann man schreiben:

$$f(x) = \sum_{t=0}^{t=n} a_t x^t \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Setzt man nun nach Thl. I. §. 116a Zus. 4.

$$a_t = \varrho_t (\cos \alpha_t + i \sin \alpha_t)$$

$$x = p_0 + iq_0 = r_0 (\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0),$$

so geht, unter Berücksichtigung von Thl. I. §. 116a Zus. 3, die Gleichung (2) über in:

$$f(x) = \sum_{t=0}^{t=n} \varrho_t (\cos \alpha_t + i \sin \alpha_t)\, r_0^t (\cos t\varphi_0 + i \sin t\varphi_0)$$

oder nach Thl. I. §. 116a Zus. 2 in:

$$f(x) = \sum_{t=0}^{t=n} \varrho_t\, r_0^t\, [\cos (t\varphi_0 + \alpha_t) + i \sin (t\varphi_0 + \alpha_t)].$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$\sum_{t=0}^{t=n} \varrho_t\, r_0^t \cos (t\varphi_0 + \alpha_t) = P_0 \ldots\ldots (3)$$

$$\sum_{t=0}^{t=n} \varrho_t\, r_0^t \sin (t\varphi_0 + \alpha_t) = Q_0 \ldots\ldots (4)$$

und darnach $P_0 + i\,Q_0 = R_0 (\cos \Phi_0 + i \sin \Phi_0)$ . . (5)
setzt, in:

$f[r_0 (\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)] = R_0 (\cos \Phi_0 + i \sin \Phi_0)$ . . (6).

Nach Theil I. §. 115. 4. ist wegen (5):

$$R_0 \cos \Phi_0 = P_0 \text{ und } R_0 \sin \Phi_0 = Q_0$$

und hiernach $R_0^2 (\cos^2 \Phi_0 + \sin^2 \Phi_0) = P_0^2 + Q_0^2$

oder da $\cos^2 \Phi_0 + \sin^2 \Phi_0 = 1$,

auch $R_0^2 = P_0^2 + Q_0^2$,

oder nach (3) und (4) für $t > u$:

$$R_0^2 = \sum_{t=0}^{t=n} (\varrho_t\, r_0^t)^2 \left[\cos^2 (t\varphi_0 + \alpha_t) + \sin^2 (t\varphi_0 + \alpha_t)\right]$$

$$+ 2 \sum_{t=0}^{t=n} [\varrho_t\, r_0^t \cos (t\varphi_0 + \alpha_t) \,.\, \varrho_u\, r_0^u \cos (u\varphi_0 + \alpha_u)$$

$$+ \varrho_t\, r_0^t \sin (t\varphi_0 + \alpha_t) \,.\, \varrho_u\, r_0^u \sin (u\varphi_0 + \alpha_u)]$$

$$= \sum_{t=0}^{t=n} \varrho_t^2\, r_0^{2t} + 2 \sum_{t=0}^{t=n} \varrho_t\, \varrho_u\, r_0^{t+u} \cos (t\varphi_0 + \alpha_t - u\varphi_0 - \alpha_u)$$

$$= r_0^{2n} \left[\sum_{t=0}^{t=n} \frac{\varrho_t^2}{r_0^{2(n-t)}} + 2 \sum_{t=0}^{t=n} \frac{\varrho_t\, \varrho_u}{r_0^{n-t}\, r_0^{n-u}} \cos \left[(t-u)\,\varphi_0 + \alpha_t - \alpha_u\right]\right].$$

In der ersten Summe des innerhalb der Parenthesen stehenden Ausdruckes tritt nur das eine Glied ϱ_t^2 auf, welches für $t = n$ im Nenner keine Potenz von r_0 hat, dagegen enthalten sämmtliche Glieder der zweiten Summe im Nenner den Faktor r_0, weil t und u nicht gleichzeitig denselben Werth haben können, indem $t > u$ ist.

Läßt man daher r_0 unendlich wachsen, so nähert sich R_0^2 immer mehr und mehr dem Werthe $r_0^{2n}\, \varrho_n^2$, also R_0 dem Werthe $r_0^n\, \varrho_n$. Es wird somit R_0 bei unendlicher Zunahme von r_0 selbst unendlich und kann demnach keinen absolut größten Werth annehmen. Da aber R_0^2 stets positiv ist, so muß es für r_0 einen bestimmten Werth geben, für welchen R_0^2 einen absolut kleinsten Werth annimmt oder ein Minimum wird.

Nehmen wir nun an für

$$x = p_0 + iq_0$$

nehme R_0^2 den absolut kleinsten Werth R_0^2 an, und setzen

$$x = p_0 + iq_0 + \delta\,(r + is)$$

wo δ eine unendlich klein werdende Größe bezeichnet, so wird

$$f[p_0 + iq_0 + \delta\,(r + is)] = \sum_{t=0}^{t=n} \delta^t\, (r + is)^t\, f_t\, (p_0 + iq_0)$$

oder wenn man

$$f_t\ (p_0 + iq_0) = R_t\ (\cos\ \Phi_t + i\ \sin\ \Phi_t)$$

und

$$r + is = m\ (\cos\ \mu + i\ \sin\ \mu)$$

setzt,

$$f[p_0 + iq_0 + \delta\ (r + is)]$$

$$= \sum_{t=0}^{t=n} \delta^t R_t (\cos\ \Phi_t + i\ \sin\ \Phi_t)\ m^t (\cos \mu\ t + i\ \sin \mu\ t)$$

$$= \sum_{t=0}^{t=n} \delta^t R_t m^t [\cos\ (\Phi_t + \mu\ t) + i\ \sin\ (\Phi_t + \mu\ t)] \ldots\ldots (7).$$

Setzt man nun

$$\sum_{t=0}^{t=n} \delta^t\ R_t\ m^t\ \cos\ (\Phi_t + \mu\ t) = R\ \cos\ \Phi$$

$$\sum_{t=0}^{t=n} \delta^t\ R_t\ m^t\ \sin\ (\Phi_t + \mu\ t) = R\ \sin\ \Phi$$

oder

$$R\ \cos\ \Phi = R_0\ \cos\ \Phi_0 + \sum_{t=1}^{t=n} \delta^t\ R_t\ m^t\ \cos\ (\Phi_t + \mu\ t)$$

$$R\ \sin\ \Phi = R_0\ \sin\ \Phi_0 + \sum_{t=1}^{t=n} \delta^t\ R_t\ m^t\ \sin\ (\Phi_t + \mu\ t)$$

so folgt hieraus, wenn man beide Gleichungen quadrirt und addirt:

$$R^2 = R_0^2 + 2R_0 \Bigg[\sum_{t=1}^{t=n} \delta^t\ R_t\ m^t\ \cos\ (\Phi_t + \mu\ t)\ \cos\ \Phi_0$$
$$+ \delta^t\ R_t\ m^t\ \sin\ (\Phi_t + \mu\ t)\ \sin\ \Phi_0\Bigg]$$
$$+ \left[\sum_{t=1}^{t=n} \delta^t\ R_t\ m^t\ \cos\ (\Phi_t + \mu\ t)\right]^2$$
$$+ \left[\sum_{t=1}^{t=n} \delta^t\ R_t\ m^t\ \sin\ (\Phi_t + \mu\ t)\right]^2$$

$$= R_0^2 + 2R_0 \sum_{t=1}^{t=n} \delta^t\ R_t\ m^t\ \cos\ (\Phi_t + \mu\ t - \Phi_0)$$
$$+ \left[\sum_{t=1}^{t=n} \delta^t\ R_t\ m^t\ \cos\ (\Phi_t + \mu\ t)\right]^2$$
$$+ \left[\sum_{t=1}^{t=n} \delta^t\ R_t\ m^t\ \sin\ (\Phi_t + \mu\ t)\right]^2.$$

Da nun R_0 ein Minimum werden soll, so muß stets $R > R_0$ sein, was auch δ sei.

Von den Größen $R_1, R_2, R_3, \ldots R_n$ können zwar einzelne

Null sein, alle zugleich aber nicht; denn sonst würde aus (7) folgen:

$$f[p_0 + iq_0 + \delta\,(r + is)] = R_0\,(\cos\,\Phi_0 + i\,\sin\,\Phi_0)$$
$$= f(p_0 + iq_0)$$

d. h. es würde sich f(x) nicht gleichzeitig mit x ändern.

Bezeichnet nun R_b die erste der Größen $R_1, R_2, \ldots R_n$, welche nicht Null ist, so hat man:

$$R^2 - R_0^2 = 2R_0 \sum_{t=b}^{t=n} \delta^t\,R_t\,m^t\,\cos\,(\Phi_t + \mu\,t - \Phi_0)$$
$$+ \left[\sum_{t=b}^{t=n} \delta^t\,R_t\,m^t\,\cos\,(\Phi_t + \mu\,t)\right]^2$$
$$+ \left[\sum_{t=b}^{t=n} \delta^t\,R_t\,m^t\,\sin\,(\Phi_t + \mu\,t)\right]^2 \;.\;.\;.\;.\;. (8).$$

Das Zeichen der rechten Seite dieser Gleichung hängt nach §. 90 lediglich von dem Gliede, welches x in der niedrigsten Potenz enthält, also wenn R_0 nicht Null ist, von

$$2R_0\,\delta^b\,R_b\,m^b\,\cos\,(\Phi_b + \mu\,b - \Phi_0)$$

ab. Da aber $R^2 - R_0^2$ stets positiv ist, so muß vorstehendes Glied ebenfalls positiv sein, wie man auch

$$r + is = m\,(\cos\,\mu + i\,\sin\,\mu)$$

annehmen mag.

Somit müßte auch der Ausdruck

$$\cos\,(\Phi_b + \mu\,b - \Phi_0)$$

stets positiv sein. Nun sind aber $\Phi_b - \Phi_0$ und b constante Größen, während μ beliebig ist; also lassen sich jedenfalls für μ Werthe angeben, für welche der vorstehende Ausdruck auch negativ ausfällt. Wenn daher R_0 nicht Null ist, so kann die Differenz $R^2 - R_0^2$ bald positiv, bald negativ werden, was der Voraussetzung widersprechen würde, daß R_0 ein Minimum sei. Es muß somit $R_0 = 0$ sein; denn alsdann erscheint nach (8) die Differenz $R^2 - R_0^2$ als Summe zweier Quadrate und ist somit stets positiv.

Für $$R_0 = 0$$
folgt aber aus (6)

$$f[r_0\,(\cos\,\varphi_0 + i\,\sin\,\varphi_0)] = 0$$

oder $$f(p_0 + iq_0) = 0$$

d. h. $p_0 + iq_0$ ist eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = 0.$$

§. 93. Lehrsatz.

Ist $x = w$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so ist das Gleichungspolynom $f(x)$ durch $(x - w)$ theilbar.

Beweis.

Wenn $x = w$ eine Wurzel der Gleichung
$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$
ist, so hat man:
$$f(w) = w^n + A_1 w^{n-1} + A_2 w^{n-2} + \ldots + A_{n-1} w + A_n = 0$$
und durch Subtraktion beider Gleichungen folgt:
$$f(x) = (x^n - w^n) + A_1(x^{n-1} - w^{n-1}) + A_2(x^{n-2} - w^{n-2}) + \ldots + A_{n-2}(x^2 - w^2) + A_{n-1}(x - w).$$
Nun ist aber jede der Differenzen
$$x^n - w^n,\ x^{n-1} - w^{n-1},\ \ldots\ x^2 - w^2,\ x - w$$
durch $(x - w)$ theilbar, also ist es auch das Gleichungspolynom $f(x)$.

Anmerkung. Ist die Wurzel der Gleichung negativ, z. B. $= -w$, so ist also $f(x)$ durch $[x - (-w)]$ oder durch $(x + w)$ theilbar.

2) Die Richtigkeit des obigen Lehrsatzes ergibt sich auch aus folgender Betrachtung:

Dividirt man das Polynom $f(x)$ durch $(x - w)$, so erhält man im Allgemeinen irgend einen Quotienten, den wir durch $\varphi(x)$ bezeichnen wollen, und einen von x unabhängigen Rest r, so daß für jeden Werth von x
$$f(x) = (x - w)\,\varphi(x) + r$$
gesetzt werden kann.

Nun wird aber für $x = w$
$$f(x) = 0$$
und vorstehende Gleichung geht in diesem Falle über in
$$0 = 0 + r$$
woraus folgt:
$$r = 0,$$
d. h. $f(x)$ läßt durch $(x - w)$ dividirt keinen Rest, ist also durch $(x - w)$ theilbar.

Beispiele.

1) Ist
$$f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$$
die vorgelegte Gleichung, so überzeugt man sich leicht durch Einführung des Werthes 3 statt x, daß dafür $f(x)$ Null wird, also 3 eine Wurzel der Gleichung ist. Dividirt man nun das Gleichungspolynom
$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$
durch $(x - 3)$, so resultirt
$$x^3 + 2x^2 - x - 2$$
als Quotient.

2) Wie man sich leicht überzeugt, ist — 5 eine Wurzel der Gleichung

$$x^4 - x^3 - 27x^2 + 25x + 50 = 0.$$

Dividirt man nun das Polynom derselben durch $[x - (-5)] = x + 5$, so erhält man den Quotienten

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 10.$$

Zusatz.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, daß die Ausführung der Division eines Gleichungspolynoms durch ein Binom von der Form $(x - a)$ auf die gewöhnliche Weise in den meisten Fällen sehr langwierig und zeitraubend ist. Wir wollen deshalb nachstehend in Kürze eines von Horner gelehrten Verfahrens erwähnen, das geeignet ist, derartige Divisionen viel rascher zu bewerkstelligen.

Ist

$$f(x) = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}\,x + A_n$$

und wird dieses Polynom durch $(x - a)$ dividirt, so erhält man im Allgemeinen einen Quotienten von der Form

$$x^{n-1} + B_1x^{n-2} + B_2x^{n-3} + \ldots + B_{n-1}$$

und irgend einen Rest B_n, worin, wie man sich leicht durch Bestimmung einiger Glieder auf dem gewöhnlichen Wege überzeugt, zu setzen ist:

$$\begin{aligned}
B_1 &= a + A_1 \\
B_2 &= a^2 + A_1a + A_2 \\
&= a\,(a + A_1) + A_2 \\
&= aB_1 + A_2 \\
B_3 &= a^3 + A_1a^2 + A_2a + A_3 \\
&= a\,[a\,(a + A_1) + A_2] + A_3 \\
&= aB_2 + A_3 \\
B_4 &= aB_3 + A_4 \\
&\;\;\vdots \\
B_{n-1} &= a^{n-1} + A_1a^{n-2} + A_2a^{n-3} + \ldots + A_{n-2}\,a + A_{n-1} \\
&= aB_{n-2} + A_{n-1} \\
B_n &= a^n + A_1a^{n-1} + A_2a^{n-2} + \ldots + A_{n-1}\,a + A_n \\
&= aB_{n-1} + A_n \\
&= f(a).
\end{aligned}$$

Der Quotient der Division ist somit:

$$x^{n-1} + (a + A_1)\, x^{n-1} + (aB_1 + A_2)\, x^{n-2} + (aB_2 + A_3) x^{n-3} + \ldots + (aB_{n-2} + A_{n-1})$$

und der Rest

$$B_n = f(a).$$

Man ersieht hieraus wie auf ganz mechanische Weise jederzeit der Coefficient irgend eines Gliedes des Quotienten, so wie der Endrest aus dem Coefficienten des nächstvorhergehenden Gliedes und dem entsprechenden Coefficienten des zu dividirenden Polynoms erhalten werden kann.

Nachstehendes Schema wird dieses zum besseren Verständnisse bringen:

$$\begin{array}{llcll}
 & \underbrace{a} & & & \\
A_1. & a & + A_1 & = & B_1 \\
A_2 & aB_1 & + A_2 & = & B_2 \\
A_3 & aB_2 & + A_3 & = & B_3 \\
A_4 & aB_3 & + A_4 & = & B_4 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
A_{n-1} & aB_{n-2} & + A_{n-1} & = & B_{n-1} \\
A_n & aB_{n-1} & + A_n & = & B_n\,.
\end{array}$$

Anmerkung. Zu demselben Gesetze gelangt man auch durch Anwendung des Satzes von den unbestimmten Coefficienten wie folgt:

Setzt man

$$\frac{f(x)}{x-a} = x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-3} + \ldots + B_{n-2} x + B_{n-1} + \frac{B_n}{x-a},$$

so wird

$$f(x) = x^n + (B_1 - a) x^{n-1} + (B_2 - aB_1) x^{n-2} + \ldots + (B_{n-2} - aB_{n-3}) x^2 + (B_{n-1} - aB_{n-2}) x + B_n - aB_{n-1}.$$

Da aber auch

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n,$$

so hat man:

$$\begin{array}{lll}
B_1 & - a & = A_1 \\
B_2 & - aB_1 & = A_2 \\
B_3 & - aB_2 & = A_3 \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
B_{n-2} & - aB_{n-3} & = A_{n-2} \\
B_{n-1} & - aB_{n-2} & = A_{n-1} \\
B_n & - aB_{n-1} & = A_n,
\end{array}$$

woraus sich schließlich für $B_1, B_2, \ldots B_n$ die schon oben gefundenen Werthe ergeben.

Beispiele.

1) Das Polynom

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

durch $x - 3$ zu dividiren.

Auflösung.

Setze $A_1 = -1$, $A_2 = -7$, $A_3 = 1$, $A_4 = 6$, $a = 3$, so folgt:

$$\begin{array}{rr} & \underbrace{3} \\ -1 & 3 - 1 = 2 \\ -7 & 3 . 2 - 7 = -1 \\ 1 & 3 . -1 + 1 = -2 \\ 6 & 3 . -2 + 6 = 0. \end{array}$$

Der Rest ist somit Null, die Division geht demnach auf und der Quotient ist:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2.$$

2) Das Polynom

$$x^4 - x^3 - 27x^2 + 25x + 50$$

durch $x + 5$ zu dividiren.

Auflösung.

Setze $A_1 = -1$, $A_2 = -27$, $A_3 = 25$, $A_4 = 50$, $a = -5$, dann folgt:

$$\begin{array}{rr} & \underbrace{-5} \\ -1 & -5 - 1 = -6 \\ -27 & -5 . -6 - 27 = 3 \\ 25 & -5 . 3 + 25 = 10 \\ 50 & -5 . 10 + 50 = 0. \end{array}$$

Die Division geht somit wieder auf und der Quotient ist:

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 10$$

3) Das Polynom

$$x^5 + 7x^4 - 13x^3 + 7x^2 - 5x + 3$$

durch $(x - 4)$ zu dividiren.

Auflösung.

$$\begin{array}{rr} & \underbrace{4} \\ 7 & 4 + 7 = 11 \\ -13 & 4 . 11 - 13 = 31 \\ 7 & 4 . 31 + 7 = 131 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} -\ 5 & 4\,.\,131 - 5 = 519 \\ 3 & 4\,.\,519 + 3 = 2079. \end{array}$$

Der Quotient heißt daher:

$$x^4 + 11x^3 + 31x^2 + 131x + 519$$

und der Rest ist 2079.

Anmerkung. Ist der Coefficient des ersten Gliedes nicht 1, sondern etwa A_0, so bleibt das Verfahren genau dasselbe, wie sich leicht nachweisen läßt. Das Schema der Operation ist alsdann

$$\begin{array}{ll} & \underbrace{a} \\ A_0 & A_0 = B_0 \\ A_1 & aB_0 + A_1 = B_1 \\ A_2 & aB_1 + A_2 = B_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{n-1} & aB_{n-2} + A_{n-1} = B_{n-1} \\ A_n & aB_{n-1} + A_n = B_n\,. \end{array}$$

Ist z. B. das Polynom

$$6x^3 - 5x^2 + 7x - 12$$

durch $x - 3$ zu dividiren, so erhält man hiernach:

$$\begin{array}{rr} & \underbrace{3} \\ 6 & 6 = 6 \\ -\ 5 & 3\,.\,6 - 5 = 13 \\ 7 & 3\,.\,13 + 7 = 46 \\ -\ 12 & 3\,.\,46 - 12 = 126 \end{array}$$

und somit

$$6x^2 + 13x + 46$$

als Quotienten und 126 als Rest.

2) Aus der identischen Gleichung [§. 86 (6)]:

$$f(x + \delta) = f(x) + \delta f_1(x) + \delta^2 f_2(x) + \ldots + \delta^n f_n(x)$$

folgt für $x = a,\ \delta = x - a$:

$$f(x) = f(a) + (x - a) f_1(a) + (x - a)^2 f_2(a) + \ldots + (x - a)^n f_n(a).$$

Ist nun a eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = 0,$$

also

$$f(a) = 0,$$

so ergibt sich aus vorstehender Gleichung:

$$\frac{f(x)}{x-a} = f_1(a) + (x - a) f_2(a) + \ldots + (x - a)^{n-1} f_n(a),$$

woraus sich ebenfalls die Theilbarkeit von f(x) durch $(x - a)$ erkennen äßt, im Falle a eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist.

Ist f(a) nicht Null, also a keine Wurzel, so erhält man nach Obigem f(a) als Rest bei der Division von f(x) durch $(x - a)$.

§. 94. Aufgaben zur Uebung.

Die Quotienten und Reste für nachstehende Divisionsaufgaben zu bestimmen:

1) $(x^3 - 8x^2 + 2x + 10) : (x - 5)$.

2) $(x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 22x - 8) : (x - 4)$.

3) $(x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 7x^2 - 11x - 15) : (x + 3)$
4) $(x^4 - 15x^3 + 61x^2 - 39x + 28) : (x - 7)$
5) $(x^4 - 10x^3 + 8x^2 + 4x - 155) : (x - 9)$
6) $(x^7 + 10x^6 - 8x^4 - 78x^3 + 20x^2 - 4x + 60) : (x + 10)$
7) $(x^6 - 5x^5 + 4x^3 - 20x^2 - 2x + 10) : (x - 5)$
8) $(4x^5 + 24x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 43x + 10) : (x + 6)$.

§. 95. Lehrsatz.

Jede Gleichung hat genau so viele Wurzeln als der höchste Exponent der Unbekannten Einheiten enthält.

Beweis.

Ist

$$f(x) = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0$$

eine Gleichung vom $n$ten Grade und w_1 eine Wurzel derselben, so kann man nach §. 93 setzen

$$f(x) = (x - w_1)(x^{n-1} + B_1x^{n-2} + B_2x^{n-3} + \ldots + B_{n-2}x + B_{n-1}) = 0$$

oder wenn wir den polynomischen Faktor der rechten Seite durch $F_1(x)$ bezeichnen,

$$f(x) = (x - w_1)F_1(x) = 0 \ldots\ldots (1)$$

Dieser Gleichung wird aber nicht nur durch den Werth $x = w_1$, sondern auch durch

$$F_1(x) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Genüge geleistet. Da es nun aber nach §. 92 jedenfalls für x einen Werth w_2 gibt, welcher $F(x)$ auf Null reducirt, oder eine Wurzel der Gleichung (2) ist, so können wir auch setzen:

$$F_1(x) = (x - w_2)(x^{n-2} + C_1x^{n-3} + \ldots + C_{n-3}x + C_{n-2}) = 0$$

oder kürzer:

$$F_1(x) = (x - w_2)F_2(x) = 0.$$

Analog wird man haben:

$$F_2(x) = (x - w_3)F_3(x) = 0$$
$$F_3(x) = (x - w_4)F_4(x) = 0$$
$$\vdots$$
$$F_{n-2}(x) = (x - w_{n-1})F_{n-1}(x) = 0$$
$$F_{n-1}(x) = (x - w_n) = 0$$

wo offenbar die Gleichung $F_{n-1}(x) = 0$ vom ersten Grade sein muß.

Führt man diese Werthe rückwärts bis zur Gleichung (1) ein, so erhält man:

$$f(x) = (x - w_1)(x - w_2) \ldots (x - w_{n-1})(x - w_n) = 0 \ldots (3)$$

woraus hervorgeht, daß obige Gleichung des nten Grades jedenfalls n Wurzeln hat, da jeder der n Werthe $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$, für x eingesetzt, das Polynom $f(x)$ auf Null reducirt.

Sind mehre der Faktoren gleich, ist also z. B. $f(x)$ durch $(x - w)^m$ theilbar, so sagt man w sei eine mfache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

Um nun noch zu zeigen, daß die vorgelegte Gleichung nicht mehr als n Wurzeln haben kann, wollen wir annehmen, es ise w_0 noch eine weitere von $w_1, w_2, \ldots w_{n-1}, w_n$ verschiedene Wurzel derselben. Dann würde man aus der Gleichung (3) erhalten:

$$(w_0 - w_1)(w_0 - w_2)(w_0 - w_3) \ldots (w_0 - w_{n-1})(w_0 - w_n) = 0$$

was unmöglich ist, da sämmtliche Binomialfaktoren von Null verschieden sind.*) Die Gleichung vom nten Grade hat somit n Wurzeln und weder mehr noch weniger.

Zusätze.

1) Jede rationale Funktion läßt sich in ebenso viel Binomialfaktoren vom ersten Grade zerlegen, als der höchste Exponent der Veränderlichen Einheiten hat.

---

*) Auch wenn das Produkt zweier complexen Zahlen Null ist muß einer der Faktoren Null sein. Denn

ist $(a + bi)(c + di) = 0 \ldots\ldots\ldots (\alpha)$

so folgt: $ac - bd + (ad + bc)i = 0$

also ist $ac - bd = 0$ und $ad + bc = 0$

folglich auch $ac - bd - (ad + bc)i = c(a - bi) - di(a - bi) = 0$

oder $(a - bi)(c - di) = 0 \ldots\ldots\ldots (\beta)$

Durch Multiplikation von (α) und (β) erhält man:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 0$$

und hieraus, daß entweder

$$a^2 + b^2 = 0,$$

oder $c^2 + d^2 = 0$.

Im ersten Falle muß also

$$a = 0,\ b = 0, \text{ daher } a + bi = 0$$

und im zweiten Falle

$$c = 0,\ d = 0, \text{ daher } c + di = 0$$

sein.

2) Durch obige Gleichung (3) ist uns ein Mittel an die Hand gegeben, eine Gleichung zu bilden, welche gegebene Wurzeln hat.

Soll z. B. eine Gleichung aufgestellt werden, welcher die vier Wurzeln 2, 3, — 1, — 5 entsprechen, so setze man

$$(x - 2)\ (x - 3)\ (x + 1)\ (x + 5) = 0$$

und bestimme hieraus durch Ausführung der angedeuteten Multiplicationen die Gleichung:

$$x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30 = 0.$$

Ebenso erhält man als Gleichung, welche den Wurzeln 3, 3, 3, — 2, — 1 entspricht:

$$(x - 3)^3\ (x + 2)\ (x + 1) = 0$$

oder $\quad x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54 = 0.$

3) Kennt man m Wurzeln $w_1, w_2, \ldots . w_m$ der Gleichung $f(x) = 0$ vom nten Grade, so kann diese nach Vorstehendem durch Division des Polynoms $f(x)$ durch das Produkt

$$(x - w_1)\ (x - w_2)\ \ldots .\ (x - w_m)$$

auf eine Gleichung vom $(n - m)$ten Grade zurückgeführt werden.

4) Führt man die in der Gleichung (3) angedeutete Multiplikation aus und vergleicht das gewonnene Resultat mit der ursprünglichen Gleichung

$$x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots . + A_{n-1}\ x + A_n = 0,$$

so erhält man zwischen den Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, A_n$ und den Wurzeln $w_1, w_2, \ldots . w_{n-1}, w_n$ dieser Gleichung nachstehende Beziehungen:

$$A_1 = -(w_1 + w_2 + w_3 + \ldots . + w_n)$$

$$A_2 = w_1\ w_2 + w_1\ w_3 + w_1\ w_4 + \ldots . + w_1\ w_n + w_2\ w_3 + w_2\ w_4 + w_2\ w_5 + \ldots . + w_2\ w_n + w_3\ w_4 + \ldots . + w_3\ w_n + \ldots . + \ldots . + w_{n-1}\ w_n.$$

$$A_3 = -(w_1\ w_2\ w_3 + w_1\ w_2\ w_4 + w_1\ w_2\ w_5 + \ldots + w_1\ w_2\ w_n + w_2\ w_3\ w_4 + \ldots . + \ldots . + w_{n-2}\ w_{n-1}\ w_n)$$

. . . .

$$A_n = (-1)^n\ w_1\ w_2\ w_3\ w_4\ \ldots .\ w_{n-1}\ w_n.$$

Wir ziehen hieraus folgenden Schluß:

In jeder Gleichung von der Form

$$x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots . + A_{n-1}x + A_n = 0$$

besteht der Coefficient des zweiten Gliedes aus der Summe aller Wurzeln mit entgegengesetztem Zeichen genommen, der Coefficient

des dritten Gliedes aus der Summe aller Combinationen der n Wurzeln zur zweiten Klasse ohne Wiederholung mit unverändertem Zeichen, der Coefficient des vierten Gliedes aus der Summe aller Combinationen der n Wurzeln zur dritten Klasse ohne Wiederholung mit entgegengesetztem Zeichen genommen u. s. w.; schließlich das letzte Glied aus dem Produkte aller Wurzeln mit unverändertem oder entgegengesetztem Zeichen genommen, je nachdem der höchste Exponent der Unbekannten gerade oder ungerade ist.

§. 96. Aufgaben zur Uebung.

Man soll die Gleichungen aufstellen, deren Wurzeln sind:

1) 2, 3, 4.
2) 3, 5, — 7.
3) 2, — 1, — 3.
4) — 2, — 3, — 4.
5) 1, 3, 4, 5.
6) 2, — 1, — 3, — 4.
7) 3, 5, — 2, — 3, — 5.
8) 1, 2, 2, 3.
9) 2, 2, 2, 2, — 3.

§. 97. Lehrsatz.

Hat die Gleichung $f(x) = 0$, deren Coefficienten reell sind, eine Wurzel von der Form $a + bi$, so ist nothwendig der conjugirte Werth $a - bi$ auch eine Wurzel derselben.

Beweis.

Führt man für x den Werth $a + bi$ in die Gleichung

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

ein, so erhält man:

$$f(a + bi) = (a + bi)^n + A_1 (a + bi)^{n-1} + \ldots + A_{n-1} (a + bi) + A_n = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

also eine Gleichung von der Form

$$A + Bi = 0.$$

Nach Bd. I. §. 115, 2 ist in diesem Falle

$$A = 0 \text{ und } B = 0$$

und da aus (1) auch folgt:

$$f(a - bi) = A - Bi = 0,$$

so ist $a - bi$ ebenfalls eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ und es kommen somit die imaginären Wurzeln stets paarweise vor.

Zusätze.

Ist $a + bi$, also auch $a - bi$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so sind

$$x - a - bi \text{ und } x - a + bi$$

nach §. 95 Faktoren des Polynoms $f(x)$, also ist auch das Produkt beider oder

$$(x - a - bi)(x - a + bi) = (x - a)^2 + b^2$$
$$= x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

ein Faktor desselben. Da nun dieses Produkt stets reell und positiv ausfällt, so ziehen wir hieraus in Verbindung mit dem Obigen folgende Schlüsse:

1) Das Gleichungspolynom $f(x)$ läßt sich stets in ein Produkt aus lauter reellen Faktoren vom ersten und zweiten Grade zerlegen.

2) Hat eine Gleichung reelle Wurzeln, so sind diese in gerader oder ungerader Anzahl vorhanden, je nachdem die Gleichung von geradem oder ungeradem Grade ist, da die imaginären Wurzeln nach obigem Satze stets in gerader Anzahl vorkommen.

3) Jede Gleichung von ungeradem Grade besitzt nach 2. wenigstens eine reelle Wurzel. Diese hat das entgegengesetzte Zeichen des letzten Gliedes.

Denn da das Polynom die Form hat:

$$(x^2 - 2a_1x + a_1^2 + b_1^2)(x^2 - 2a_2x + a_2^2 + b_2^2) \ldots (x - w_1)$$
$$(x - w_2)(x - w_3) \ldots$$

so ist nach §. 95. Zus. 4 das letzte Glied

$$A_n = -(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \ldots w_1 w_2 \ldots$$

und hat daher mit dem Produkte $- w_1 w_2 \ldots$ einerlei Zeichen.

Hiernach fällt somit das Produkt $- A_n w_1 w_2 \ldots$ stets positiv, also das Produkt $A_n w_1 w_2 \ldots$ stets negativ aus.

Hätten nun alle Wurzeln einerlei Zeichen mit dem letzten

Gliede A_n, so wäre, da die Anzahl der Faktoren $A_n, w_1, w_2 \ldots$ gerade ist, das Produkt $A_n\, w_1\, w_2 \ldots$ positiv, was im Widerspruche mit dem eben Mitgetheilten stehen würde.

4) Jede Gleichung von geradem Grade, deren letztes Glied negativ ist, hat wenigstens zwei reelle Wurzeln, von welchen die eine positiv, die andere negativ ist.

Denn angenommen die Gleichung hätte lauter imaginäre Wurzeln, also das Polynom die Form

$$(x^2 - 2a_1x + a_1^2 + b_1^2)\,(x^2 - 2a_2x + a_2^2 + b_2^2) \ldots$$

so wäre das letzte Glied:

$$A_n = (a_1^2 + b_1^2)\,(a_2^2 + b_2^2) \ldots$$

also jedenfalls positiv, was mit der Annahme im Widerspruche stünde. Es muß somit wenigstens eine reelle Wurzel w_1 vorhanden sein. Dividirt man nun das Polynom $f(x)$ durch $x - w_1$, so ist der Quotient von ungeradem Grade und wenn man denselben Null setzt, so entsprechen der so erhaltenen Gleichung die übrigen $(n - 1)$ Wurzeln, worunter jedenfalls eine ungerade Anzahl von reellen sich befindet.

Bezeichnen wir diese durch $w_2, w_3, w_4, \ldots$ so ist die Form des Polynoms

$$f(x) = (x^2 - 2a_1x + a_1^2 + b_1^2)\,(x^2 - 2a_2x + a_2^2 + b_2^2) \ldots (x - w_1)\,(x - w_2) \ldots$$

und somit das letzte Glied

$$A_n = (a_1^2 + b_1^2)\,(a_2^2 + b_2^2) \ldots w_1\, w_2\, w_3 \ldots$$

Dieses hat hiernach einerlei Zeichen mit dem Produkte $w_1\, w_2\, w_3 \ldots$

Da aber das letzte Glied der Voraussetzung zufolge negativ ist, so muß nach §. 95. Zus. 4 das Produkt $w_1\, w_2\, w_3 \ldots$ ebenfalls negativ sein und es können somit die reellen Wurzeln w_1, $w_2, w_3, \ldots$ nicht sämmtlich einerlei Zeichen haben, da deren Anzahl gerade ist. Hat demnach die Gleichung reelle Wurzeln, so sind es deren wenigstens zwei von entgegengesetztem Zeichen.

5) Das Gleichungspolynom $f(x)$ einer Gleichung, welche nur imaginäre Wurzeln hat, behält für jeden Werth von x dasselbe Zeichen.

6) Soll das Gleichungspolynom $f(x)$ für keinen reellen

Werth von x sein Zeichen ändern, oder Null werden, so muß die Gleichung $f(x) = 0$ lauter imaginäre Wurzeln haben.

7) Aendert das Polynom $f(x)$ für irgend einen reellen Werth von x sein Zeichen, so hat die Gleichung $f(x) = 0$ jedenfalls nicht lauter imaginäre Wurzeln.

§. 98. Lehrsatz.

Führt man in einer Gleichung $f(x) = 0$ für x den Werth $-x$ ein, so stimmen sämmtliche Wurzeln der neuen Gleichung $f(-x) = 0$ dem numerischen Werthe nach mit den Wurzeln der ursprünglichen Gleichung überein, erhalten aber die entgegengesetzten Zeichen.

Beweis.

Bezeichnen $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$ die n Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ des nten Grades, so ist nach §. 95:

$$f(x) = (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3) \ldots (x - w_n).$$

Substituirt man hierin $-x$ statt x, so folgt:

$$f(-x) = (-x - w_1)(-x - w_2) \ldots (-x - w_n)$$
$$= \pm (x + w_1)(x + w_2) \ldots (x + w_n)$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu setzen hat, je nachdem die vorgelegte Gleichung von geradem oder ungeradem Grade ist.

Hieraus geht unmittelbar hervor, daß $-w_1, -w_2, -w_3, \ldots -w_n$ die Wurzeln der veränderten Gleichung $f(-x) = 0$ sind.

Beispiel.

Man überzeugt sich leicht, daß der Gleichung

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

die drei Wurzeln 1, 3 und -2 entsprechen. Führt man nun $-x$ statt x in die Gleichung ein, so geht dieselbe über in:

$$-x^3 - 2x^2 + 5x + 6 = 0$$

oder

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0,$$

welcher nun die drei Wurzeln -1, -3 und 2 zukommen.

§. 99. Lehrsatz.

Substituirt man in einer Gleichung $f(x) = 0$ der Reihe nach für x die Werthe 1, 2, 3, ... r, s, ... und es ändert das Polynom $f(x)$ zwischen zwei un-

mittelbar auf einander folgenden Substitutionen r und s kein Zeichen, so liegt zwischen r und s jedenfalls eine ungerade Anzahl von reellen Wurzeln.

Beweis.

Bezeichnen $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$ die n reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, so haben der Voraussetzung zufolge nach §. 95 die Produkte

$$(r - w_1)(r - w_2)(r - w_3)\ldots(r - w_n)$$

und $$(s - w_1)(s - w_2)(s - w_3)\ldots(s - w_n)$$

verschiedene Zeichen, indem das Produkt der imaginären Wurzeln, welche die Gleichung enthalten kann, nach §. 97 stets positiv ausfällt.

Die entsprechenden unter einander stehenden binomischen Faktoren dieser Produkte können hiernach nicht alle dasselbe Zeichen haben, sondern eine ungerade Anzahl derselben muß mit entgegengesetzten Zeichen versehen sein.

Nehmen wir nun an, daß z. B. $r - w_m$ und $s - w_m$ verschiedene, also $r - w_m$ und $w_m - s$ einerlei Zeichen haben, so ist offenbar

$$r \gtrless w_m \gtrless s,$$

woraus folgt, daß in diesem Falle die Wurzel w_m zwischen r und s liegt.

Zusätze.

1) Behält das Gleichungspolynom $f(x)$ für zwei aufeinander folgende Substitutionen r und s statt x einerlei Zeichen, so liegt zwischen r und s keine, oder überhaupt eine gerade Anzahl von reellen Wurzeln.

Denn in diesem Falle müssen in obigen Produkten die entsprechenden Faktoren entweder alle dasselbe Zeichen haben, oder eine gerade Anzahl davon hat entgegengesetzte Zeichen, weil nur dann die Produkte einerlei Zeichen haben können.

2) Liegt zwischen r und s eine ungerade / gerade Anzahl von Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, so haben $f(r)$ und $f(s)$ verschiedene / einerlei Zeichen.

3) Ist a eine 1, 3, 5, 7, ... fache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so haben $f(a + \delta)$ und $f(a - \delta)$ für ein hinreichend kleines δ entgegengesetzte Zeichen.

Denn setzt man

$$f(x) = (x - a)^{2m+1} \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ für $x = a$ nicht Null wird und $\varphi(a + \delta)$ und $\varphi(a - \delta)$ für ein hinreichend kleines δ einerlei Zeichen haben*), so erhält man:

$$f(a + \delta) = \delta^{2m+1} \varphi(a + \delta)$$
$$f(a - \delta) = - \delta^{2m+1} \varphi(a - \delta).$$

4) Ist a eine 2, 4, 6, ... fache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so haben $f(a + \delta)$ und $f(a - \delta)$ für ein hinreichend kleines δ einerlei Zeichen. Denn setzt man analog wie vorhin:

$$f(x) = (x - a)^{2m} \varphi(x),$$

so folgt hieraus:

$$f(a + \delta) = \delta^{2m} \varphi(a + \delta)$$
$$f(a - \delta) = \delta^{2m} \varphi(a - \delta).$$

5) Ist $f(a) = 0$ und haben $f(a + \delta)$ und $f(a - \delta)$ für ein hinreichend kleines δ $\begin{matrix}\text{verschiedene}\\ \text{einerlei}\end{matrix}$ Zeichen, so ist a eine $\begin{matrix}1, 3, 5, \ldots\\ 2, 4, 6, \ldots\end{matrix}$ fache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

§. 100. Lehrsatz.

Sind sämmtliche Coefficienten der Glieder einer Gleichung $f(x) = 0$ ganze Zahlen, der des ersten Gliedes aber $= 1$, so gibt es keinen reellen rationalen Bruch als Wurzel derselben.

Beweis.

Ist $\frac{p}{q}$ ein solcher Bruch, der auf seine kleinste Benennung gebracht ist und wäre nun $\frac{p}{q}$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so hätte man:

---

*) Diese Bedingung muß stets erfüllt werden können, weil andernfalls a nach Obigem 1, 3, 5, ... fache Wurzel von $\varphi(x) = 0$ sein müßte, was gegen die Annahme wäre, daß $\varphi(a)$ nicht Null sei.

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^n}{q^n} + \frac{A_1 p^{n-1}}{q^{n-1}} + \frac{A_2 p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + \frac{A_{n-1} p}{q} + A_n = 0$$

oder

$$\frac{p^n}{q} + A_1\, p^{n-1} + A_2\, p^{n-2} q + \ldots + A_{n-1} p\, q^{n-2} + A_n\, q^{n-1} = 0,$$

woraus folgen würde:

$$\frac{p^n}{q} = -\,(A_1\, p^{n-1} + A_2\, p^{n-2} q + \ldots + A_{n-1} p\, q^{n-2} + A_n q^{n-1})$$

was unmöglich ist, da $\frac{p^n}{q}$ ein Bruch sein muß, während

$-\,(A_1\, p^{n-1} + A_2\, p^{n-2} q + \ldots + A_{n-1} p\, q^{n-2} + A_n\, q^{n-1})$

eine ganze Zahl andeutet.

Es kann somit $\frac{p}{q}$ keine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ sein.

§. 101. Zusatz.

Ist

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0 \ldots (1)$$

eine Gleichung mit lauter ganzzahligen Coefficienten und a eine Wurzel derselben, so folgt aus

$$a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \ldots. + A_{n-1}\, a + A_n = 0$$

unmittelbar:

$$\frac{A_n}{a} = -\,(a^{n-1} + A_1 a^{n-2} + A_2 a^{n-3} + \ldots. + A_{n-1})$$

und da die rechte Seite dieser Gleichung eine ganze Zahl darstellt, so muß A_n durch a theilbar sein.

Aus der letzten Gleichung ergibt sich aber:

$$\frac{\frac{A_n}{a} + A_{n-1}}{a} = -\,(a^{n-2} + A_1 a^{n-3} + \ldots. + A_{n-2})$$

und hieraus:

$$\frac{\frac{\frac{A_n}{a} + A_{n-1}}{a} + A_{n-2}}{a} = -\,(a^{n-3} + A_1 a^{n-4} + \ldots + A_{n-3})$$

u. s. w. bis zuletzt -1 als Quotient erscheint.

Wir schließen hieraus auf folgenden Satz:

Ist a eine Wurzel der Gleichung (1) und man dividirt zuerst A_n durch a, addirt A_{n-1} zum Quotienten und dividirt nochmals

durch a; addirt hierauf zum erhaltenen Quotienten A_{n-2} und dividirt wiederum durch a u. s. f. bis man schließlich A_1 addirt hat, so erhält man bei dieser Operation nur ganze Quotienten und — 1 als Endquotienten. Ist a keine Wurzel der Gleichung, so ergibt sich bei der angeführten Division durch a einmal ein gebrochener Quotient, oder ein Endquotient, welcher nicht — 1 ist.

Im Falle einzelne Glieder der Gleichung fehlen, diese also nicht vollständig ist, setze man Null an die Stelle der betreffenden Coefficienten.

Beispiele.

1) Wie man sich leicht überzeugt entspricht der Gleichung

$$x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 33x + 35 = 0$$

die Wurzel 7 und nach obigem Schema erhält man:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{35}{7}-33}{7}+25}{7}-10}{7} = \frac{\frac{\frac{-28}{7}+25}{7}-10}{7} = \frac{\frac{21}{7}-10}{7} = -1$$

woraus hervorgeht, daß in der That die Zwischenquotienten ganze Zahlen sind und der Endquotient — 1 heißt.

2) Da — 3 eine Wurzel der Gleichung

$$x^6 + 3x^5 - 2x - 6 = 0$$

ist, so hat man:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{-6}{-3}-2}{-3}+0}{-3}+0}{-3}+0}{-3}+3}{-3} = -1.$$

§. 102. Erklärung.

Je nachdem zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder einer Gleichung einerlei oder entgegengesetzte Zeichen haben, sagt man, es finde zwischen beiden eine Zeichenfolge oder ein Zeichenwechsel statt.

So hat z. B. die Gleichung

$$x^6 - 8x^5 + 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 4x + 3 = 0$$

2 Zeichenfolgen und 4 Zeichenwechsel.

§. 103. Lehrsatz.

Haben sämmtliche Wurzeln einer Gleichung einerlei Zeichen, so ist dieselbe eine vollständige und hat entweder lauter Zeichenfolgen oder lauter Zeichenwechsel, je nachdem die Wurzeln negativ oder positiv sind.

Beweis.

Sind sämmtliche Wurzeln reell und negativ, so werden alle Binomialfaktoren, durch deren Multiplication die Gleichung resultirt (§. 95), positiv, also müssen auch die Partialprodukte derselben oder die einzelnen Glieder der Gleichung positiv sein und diese wird darum nur eine vollständige mit lauter Zeichenfolgen sein können.

Sind ferner w_1, w_2, ... w_r, ... w_n die n reellen, positiven Wurzeln, so heißt die entsprechende Gleichung:

$$(x - w_1)(x - w_2) \ldots (x - w_r) \ldots (x - w_n) = 0.$$

Nun sind aber die Produkte

$$(x - w_1)(x - w_2)$$

und

$$(x - w_1)(x - w_2)(x - w_3)$$

bezüglich von der Form

$$x^2 - a_1x + a_0$$

und

$$x^3 - a_2x^2 + a_1x - a_0$$

und obige Behauptung gilt somit hinsichtlich der positiven Wurzeln für Gleichungen des zweiten und dritten Grades.

Nehmen wir nun an, es sei obiger Satz auch für eine Gleichung des rten Grades, deren Wurzeln w_1, w_2 .... w_r sind, richtig, also

$$(x - w_1)(x - w_2) \ldots (x - w_r) = x^r - a_{r-1}x^{r-1} + a_{r-2}x^{r-2} - \ldots \pm a_1x \mp a_0 = 0,$$

so erhält man hieraus die Gleichung des $(r + 1)$ten Grades, welcher die $r + 1$ positiven reellen Wurzeln w_1, w_2, ... w_r, w_{r+1}, entsprechen, wenn man dieselbe mit dem Binomialfaktor $(x - w_{r+1})$ multiplicirt. Man erkennt aber sofort, daß diese neue Gleichung eine vollständige sein muß, da alle Coefficienten gleichnamiger Potenzen von x einerlei Zeichen erhalten, und da diese offenbar für das erste, dritte, fünfte, ... Glied positiv, für das zweite, vierte, ... dagegen negativ werden, so hat auch die Gleichung

des $(r+1)$ten Grades lauter Zeichenwechsel. Gilt also obiger Satz für $n = r$, so ist er auch für $n = r + 1$ richtig. Nun haben wir aber gesehen, daß er für $n = 2$ und 3 giltig ist, somit ist er auch für $n = 3 + 1 = 4$, also auch für $n = 5$ u. s. f. oder allgemein giltig.

§. 104. Lehrsatz.

Eine (vollständige oder unvollständige) Gleichung hat nicht mehr positive Wurzeln als Zeichenwechsel in ihr vorkommen.

Beweis.

Es sei $f(x) = 0$

die vorgelegte Gleichung und $F(x)$ eine ganze rationale Function von x, welche nur reelle Coefficienten hat und von der Form:

$$F(x) = x^m + \dots + B_{p-1}x^{m-(p-1)} - B_p x^{m-p} - \dots - B_{q-1}x^{m-(q-1)} + B_q x^{m-q} + \dots$$
$$+ B_{r-1}x^{m-(r-1)} - B_r x^{m-r} - \dots \mp B_{s-1}x^{m-(s-1)} \pm B_s x^{m-s} \pm \dots$$
$$\pm B_{m-1}x \pm B_m,$$

wo $B_p x^{m-p}$ das erste negative, $B_q x^{m-q}$ das erste darauf folgende positive u. s. w. und $B_s x^{m-s}$ das Glied bezeichnet, von welchem an keine Aenderung des Zeichens mehr stattfindet.

Multiplicirt man dieses Polynom $F(x)$ mit dem Binomialfaktor $(x - w)$, wo w eine reelle positive Zahl bedeutet, so erhält man:

$$x^{m+1} + \dots - B_p x^{m-p+1} - \dots + B_q x^{m-q+1} + \dots - B_r x^{m-r+1} - \dots + B_s x^{m-s+1} + \dots \pm B_m x$$
$$- \dots - B_{p-1}wx^{m-p+1} + \dots + B_{q-1}wx^{m-q+1} - \dots - B_{r-1}wx^{m-r+1} + \dots \pm B_{-1}wx^{m-s+1} \mp \dots \mp B_{m-1}wx \mp B_m w$$

und dasselbe hat somit die Form:

$$x^{m+1} \pm \dots \pm - (B_p + B_{p-1}w)x^{m-p+1} \pm \dots \pm + (B_q + B_{q-1}w)x^{m-q+1} \pm$$
$$\dots \pm - (B_r + B_{r-1}w)x^{m-r+1} \pm \dots \pm \pm (B_s + B_{s-1}w)x^{m-s+1} \pm \dots$$

wo durch $\pm$ Glieder ausgedrückt werden, deren Zeichen unbekannt sind.

Vergleicht man dieses Produkt mit dem ursprünglichen Polynom F(x), so ersieht man sofort, daß jedem Zeichenwechsel im Polynom F(x) im Produkte ein Glied entspricht, das ein ganz bestimmtes Zeichen hat. Nun haben aber das erste und letzte Glied bestimmte Zeichen, indem stets das erste positiv ist, das letzte dagegen das entgegengesetzte Zeichen des letzten Gliedes der vorgelegten Gleichung hat. Wenn somit in der Funktion F(x) etwa u Zeichenwechsel vorkommen, so hat das Produkt $(x - w) F(x)$ jedenfalls $(u + 2)$ Glieder mit ganz bestimmten Zeichen, welche regelmäßig wechseln.

Da nun aber bei regelmäßig wechselnden Zeichen

zwei, drei, vier, ... n

auf einander folgende Glieder bezüglich

einen, zwei, drei, ... n—1

Zeichenwechsel bedingen, so müssen jedenfalls in dem Produkte $(x - w) F(x)$ **wenigstens** $(u + 1)$ Zeichenwechsel auftreten, wenn F(x) deren u enthält. Wir schließen hieraus, daß F(x) durch Multiplikation mit $(x - w)$ **wenigstens** einen Zeichenwechsel gewonnen hat.

Nehmen wir nun an, es seien $- w_1, - w_2, - w_3, \ldots - w_p$ die p negativen, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_q$ die q imaginären und $W_1, W_2, W_3, \ldots W_r$ die r positiven Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = 0$$

und setzen

$$(x + w_1)(x + w_2) \ldots (x + w_p)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_q) = F(x).$$

so ist

$$f(x) = (x - W_1)(x - W_2)(x - W_3) \ldots (x - W_r) F(x)$$

Nach Obigem wird aber durch die Multiplikation eines jeden der Binomialfaktoren $(x - W_1)$, $(x - W_2)$ .... mit F(x) mindestens ein Zeichenwechsel für dieses Polynom gewonnen und es hat somit f(x) wenigstens r Zeichenwechsel mehr als F(x). Hieraus geht hervor, daß in jeder Gleichung **wenigstens** so viel Zeichenwechsel vorkommen, als sie **positive** Wurzeln hat, und umgekehrt, daß eine Gleichung nicht mehr positive Wurzeln hat, als Zeichenwechsel in ihr vorkommen.

Zusätze.

1) Führt man $- x$ statt x in die Gleichung

$$f(x) = 0$$

ein, so ändern sämmtliche Wurzeln ihre Zeichen und es kann darum die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr negative Wurzeln haben, als die Gleichung $f(-x) = 0$ Zeichenwechsel enthält. Wenn nun aber kein Glied der Gleichung fehlt, dieselbe also vollständig ist, so entspricht jedem Zeichenwechsel in $f(x)$ eine Zeichenfolge in $f(-x)$ und umgekehrt. Wir können somit behaupten:

Jede vollständige Gleichung hat nicht mehr positive Wurzeln, als Zeichenwechsel und nicht mehr negative Wurzeln, als Zeichenfolgen in ihr vorkommen.

Anmerkung. Dieser Satz wird der Cartesische, oder auch nach dem englischen Mathematiker Harriot (1560—1621), der Harriot'sche Satz genannt.

2) Da die Anzahl aller Zeichenwechsel und aller Zeichenfolgen einer vollständigen Gleichung zusammen dem höchsten Exponenten der Unbekannten gleich ist, so folgt weiter der Satz: Eine vollständige Gleichung, welche nur reelle Wurzeln besitzt, hat genau so viele positive Wurzeln, als Zeichenwechsel und so viele negative, als Zeichenfolgen in ihr enthalten sind.

3) Fehlt ein Glied einer Gleichung zwischen zwei Gliedern mit einerlei Zeichen, so hat dieselbe jedenfalls imaginäre Wurzeln; denn je nachdem man das fehlende Glied positiv, oder negativ annimmt, entstehen zwei Zeichenwechsel, oder zwei Zeichenfolgen, so daß also, wenn alle Wurzeln reell wären, zwei derselben zugleich positiv und negativ sein müßten.

4) Fehlt ein Glied zwischen zwei Gliedern mit entgegengesetztem Zeichen, so können alle Wurzeln der Gleichung reell sein, wie sich solches leicht erkennen läßt, wenn man das fehlende Glied ein mal positiv, dann negativ nimmt.

§. 105. Grenzen der reellen Wurzeln.

1) Bestimmt man zwei ganze Zahlen, welche sämmtliche Wurzeln einer Gleichung möglichst enge zwischen sich fassen, so nennt man beide die Grenzen der Wurzeln der entsprechenden

Gleichung und insbesondere heißt die Zahl, welche größer ist als die größte positive Wurzel, die **Grenze der positiven** und diejenige, welche größer ist als der größte Absolutwerth der negativen Wurzeln, die **Grenze der negativen Wurzeln.**

2) Grenzen der positiven Wurzeln können auf verschiedene Arten gewonnen werden. Wir beschränken uns auf nachstehende Methoden:

a) Nehmen wir an, es sei $A_r x^{n-r}$ das erste negative Glied, also A_r der erste negative Coefficient der Gleichung

$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$

und A_k der absolut größte der negativen Coefficienten, so wird offenbar $f(x)$ positiv, wenn

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{r-1} x^{n-r-1} + \ldots - A_k (x^{n-r} + x^{n-r-1} + \ldots + 1)$$

positiv ausfällt. Dies ist aber der Fall, wenn

$$x^n - A_k \frac{x^{n-r+1} - 1}{x - 1}$$

oder

$$x^n - A_k \frac{x^{n-r+1}}{x-1} + \frac{A_k}{x-1}$$

positiv wird.

Für $x > 1$ ist diese Bedingung erfüllt, wenn

$$x^n > A_k \frac{x^{n-r+1}}{x-1}$$

oder $\quad x^{r-1}(x-1) > A_k$

oder $\quad (x-1)^{r-1}(x-1) > A_k$

oder $\quad (x-1)^r > A_k$

also $\quad x > 1 + \sqrt[r]{A_k}.$

Beispiel.

Um nach dieser Methode die Grenze der positiven Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + 4x^3 - 211x^2 - 130x + 8410 = 0$$

zu ermitteln, hat man zu setzen:

$$n = 4,\ n - r = 2,\ r = 2,\ A_k = 211$$

und findet als Grenzwerth:

$$1 + \sqrt[r]{A_k} = 1 + \sqrt{211} = 1 + 14 = 15.$$

b) Eine in der Regel die Grenze viel genauer liefernde Methode erhält man durch folgende Betrachtung:

Substituirt man in obiger Gleichung

$$x = y + a,$$

so geht dieselbe über in:

$$f(y) = y^n + f_{n-1}(a)\, y^{n-1} + f_{n-2}(a)\, y^{n-2} + \ldots + f_2(a)\, y^2 + f_1(a)\, y + f(a) = 0,$$

wo man nach §. 86. 5. (5) zu setzen hat:

$$f(a) = a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \ldots + A_n$$

$$f_1(a) = \binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n-1}{1} A_1 a^{n-2} + \binom{n-2}{1} A_2 a^{n-3} + \ldots + A_{n-1}$$

$$f_2(a) = \binom{n}{2} a^{n-2} + \binom{n-1}{2} A_1 a^{n-3} + \binom{n-2}{2} A_2 a^{n-4} + \ldots + A_{n-2}$$

. . . .

$$f_{n-1}(a) = \binom{n}{n-1} a + A_1 = na + A_1.$$

Bestimmt man nun durch Versuche für a die kleinste ganze Zahl, für welche die sämmtlichen Coefficienten $f_{n-1}(a)$, $f_{n-2}(a)$, ... $f_1(a)$, $f(a)$ gleichzeitig positiv ausfallen, so liefert dieselbe die gewünschte Grenze der positiven Wurzeln. Denn da für diesen Werth von a die Gleichung $f(y) = 0$ nur positive Glieder erhält, also nach §. 104. Zus. 1. die Wurzeln derselben negativ sind, so folgt aus

$$x = y + a$$

oder

$$y = x - a$$

daß jener Werth von a jedenfalls größer als jede der Wurzeln von $f(x) = 0$, somit eine Grenze der positiven Wurzeln sein wird.

Beispiel.

Wendet man dieses Verfahren auf das vorige Beispiel an, und entwickelt zunächst

$$f(a) = a^4 + 4a^3 - 211a^2 - 130a + 8410$$
$$f_1(a) = 4a^3 + 12a^2 - 422a - 130$$
$$f_2(a) = 6a^2 + 12a - 211$$
$$f_3(a) = 4a + 4$$
$$f_4(a) = 1$$

und bestimmt nun den kleinsten Werth, welcher für a gesetzt, $f(a)$, $f_1(a)$, $f_2(a)$, ... gleichzeitig positiv macht, so findet man, wenn man der Reihe nach $a = 1, 2, 3, \ldots$ versucht, daß der Forderung durch $a = 10$ entsprochen wird. Es ist somit 10 eine engere Grenze als die vorhin gefundene.

c) In vielen Fällen führt auch folgende Betrachtung zu genauen Grenzwerthen:

Vermöge der identischen Gleichung

$$x^n = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1) + 1$$

kann man jedes positive Glied Px^p der Gleichung $f(x) = 0$ durch

$$P(x - 1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x^2 + x + 1) + P$$
$$= P(x - 1)x^{p-1} + P(x - 1)x^{p-2} + \ldots$$
$$+ P(x - 1)x^2 + P(x - 1)x + P(x - 1)x^0 + P$$

d. h. durch eine Reihe von Gliedern ersetzen, welche sämmtliche Potenzen von x, deren Exponenten kleiner als p sind, enthalten.

Ist nun $- Nx^m$ ein negatives Glied der Gleichung und bezeichnen $P_1x^{p_1}$, $P_2x^{p_2}$, ... die ihm vorhergehenden positiven Glieder, so sind die Exponenten p_1, p_2, p_3, ... sämmtlich größer als m und wenn man jedes dieser positiven Glieder durch die entsprechende Reihe ersetzt, so enthält die für $P_1x^{p_1}$ gesetzte Reihe das Glied $P_1(x - 1)x^m$, die für $P_2x^{p_2}$ eingeführte Reihe das Glied $P_2(x - 1)x^m$ u. s. w.

Ordnet man daher nach den Potenzen der negativen Glieder, so erhält man als Coefficient von x^m:

$$P_1(x - 1) + P_2(x - 1) + P_3(x - 1) + \ldots - N$$

oder

$$(x - 1)(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots) - N$$

was wir kurzhin ausdrücken durch:

$$(x - 1)\Sigma P - N.$$

Das ganze Gleichungspolynom besteht alsdann aus einer Reihe von positiven Gliedern und einer Anzahl Glieder von der Form

$$[(x - 1)\Sigma P - N]\,x^m$$

und wird somit positiv sein, wenn man x so bestimmt, daß für jedes Glied der zweiten Art der Ausdruck $(x - 1)\Sigma P - N$ positiv ausfällt. Dies ist aber der Fall für

$$x > \frac{N}{\Sigma P} + 1$$

und wir erhalten somit den Satz:

Man dividire jeden negativen Coefficienten durch die Summe aller vorhergehenden positiven Coeffi-

cienten, so liefert der größte der erhaltenen Quotienten um die Einheit vergrößert die Grenze der positiven Wurzeln.

Beispiel.

Ist die Grenze der positiven Wurzeln der Gleichung

$$x^6 - 8x^5 + 3x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 16x + 2 = 0$$

nach vorstehender Methode zu bestimmen, so bildet man also

$$\frac{8}{1} + 1 = 9$$

$$\frac{16}{15} + 1 = 2\tfrac{1}{15}$$

und schließt hieraus, daß 9 die verlangte Grenze ist.

3) Um die Grenze der negativen Wurzeln zu erhalten, setze man $x = -y$ in die Gleichung $f(x) = 0$ und suche alsdann für die resultirende Gleichung in y die Grenze der positiven Wurzeln, so liefert diese zugleich den Absolutwerth der Grenze der negativen Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $f(x) = 0$, da beide Gleichungen dieselben Werthe mit entgegengesetzten Zeichen zu Wurzeln haben.

Beispiel.

Ist $\quad x^4 + 4x^3 - 211x^2 - 130x + 8410 = 0$

die gegebene Gleichung und man setzt hierin $-y$ statt x, so geht dieselbe über in

$$y^4 - 4y^3 - 211y^2 + 130y + 8410 = 0.$$

Dafür findet man nach der in b) mitgetheilten Methode als Grenze der positiven Wurzeln 15 und es ist somit -15 die Grenze der negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung.

§. 106. Von den gleichen Wurzeln.

Bezeichnen wir wieder durch $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$ die n Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0$$

so ist nach §. 95:

$$x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = (x - w_1)(x - w_2) \ldots (x - w_n).$$

Setzen wir hierin $x + \delta$ statt x, wo δ irgend eine Zahl bedeutet, so geht die linke Seite der vorstehenden Gleichung nach §. 86. (6) über in:

$$f(x) + \delta f_1(x) + \delta^2 f_2(x) + \ldots + \delta^{n-1} f_{n-1}(x) + \delta^n$$

wo $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$ die in §. 86. (5) angeführte Bedeutung haben, und die rechte Seite in:

$$(x - w_1 + \delta)(x - w_2 + \delta) \ldots (x - w_n + \delta)$$
$$= (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3) \ldots (x - w_n)$$
$$+ \delta\,[(x - w_2)(x - w_3) \ldots (x - w_{n-1})(x - w_n)$$
$$+ (x - w_1)(x - w_3) \ldots (x - w_n) + \ldots$$
$$+ (x - w_1)(x - w_2) \ldots (x - w_{n-1})]$$
$$+ \delta^2\,[(x - w_3)(x - w_4) \ldots (x - w_{n-1})(x - w_n)$$
$$+ (x - w_2)(x - w_4) \ldots (x - w_n) + \ldots$$
$$+ (x - w_1)(x - w_2) \ldots (x - w_{n-2})]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \delta^{n-1}\,[(x - w_1) + (x - w_2) + \ldots\ldots + (x - w_n)]$$
$$+ \delta^n$$
$$= f(x) + \delta\left[\frac{f(x)}{x - w_1} + \frac{f(x)}{x - w_2} + \ldots + \frac{f(x)}{x - w_n}\right]$$
$$+ \delta^2\left[\frac{f(x)}{(x - w_1)(x - w_2)} + \frac{f(x)}{(x - w_1)(x - w_3)}\right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{f(x)}{(x - w_{n-1})(x - w_n)}\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \delta^{n-1}\left[\frac{f(x)}{(x - w_2)(x - w_3) \ldots (x - w_n)}\right.$$
$$\left. + \frac{f(x)}{(x - w_1)(x - w_3) \ldots (x - w_n)} + \ldots\right]$$
$$+ \delta^n.$$

Setzt man nun die für beide Seiten gewonnenen Resultate einander gleich, läßt beiderseits $f(x)$ außer Acht und dividirt das ganze Gleichungspolynom durch δ, so folgt:

$$f_1(x) + \delta f_2(x) + \delta^2 f_3(x) + \ldots + \delta^{n-1} = \frac{f(x)}{x - w_1}$$
$$+ \frac{f(x)}{x - w_2} + \ldots + \frac{f(x)}{x - w_n}$$
$$+ \delta\left[\frac{f(x)}{(x - w_1)(x - w_2)} + \frac{f(x)}{(x - w_1)(x - w_3)}\right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{f(x)}{(x - w_{n-1})(x - w_n)}\right] + \ldots + \delta^{n-1}.$$

Diese Gleichung muß aber für jeden Werth von δ bestehen, also auch für $\delta = 0$. Durch Einführung dieses speciellen Werthes von δ ergibt sich aber:

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{x - w_1} + \frac{f(x)}{x - w_2} + \ldots + \frac{f(x)}{x - w_{n-1}} + \frac{f(x)}{x - w_n}.$$

Nehmen wir nun an die Gleichung enthalte vielfache Wurzeln, es seien also mehre derselben gruppenweise einander gleich und z. B.

$$w_1 = w_2 = w_3 = \ldots = w_m = \alpha$$
$$w_{m+1} = w_{m+2} = w_{m+3} = \ldots = w_p = \beta$$
$$w_{p+1} = w_{p+2} = w_{p+3} = \ldots = w_q = \gamma,$$

dagegen seien von w_{q+1} bis w_n alle Wurzeln von einander verschieden, so ist die Anzahl derer, welchen diese Eigenschaft zukommt, $= n - q$ und es wird demnach

$$f(x) = (x - \alpha)^m (x - \beta)^{p-m} (x - \gamma)^{q-p} (x - w_{q+1}) (x - w_{q+2}) \ldots (x - w_n)$$

$$f_1(x) = m \frac{f(x)}{x - \alpha} + (p - m) \frac{(fx)}{x - \beta} + (q - p) \frac{f(x)}{x - \gamma} + \frac{f(x)}{x - w_{q-p+1}} + \ldots + \frac{f(x)}{x - w_n}.$$

Durch Vergleichung der beiden Polynomien $f(x)$ und $f_1(x)$ erkennen wir sogleich, daß beide nur das Produkt

$$(x - \alpha)^{m-1} (x - \beta)^{p-m-1} (x - \gamma)^{q-p-1}$$

zum gemeinschaftlichen Faktor haben. Da dieser aber auch erhalten wird, wenn man zu $f(x)$ und $f_1(x)$ das größte gemeinschaftliche Maß aufsucht (Thl. I. §. 49), so gelangen wir zu folgendem Schlusse:

Um zu untersuchen, ob eine Gleichung gleiche oder vielfache Wurzeln habe, bestimme man zu dem gegebenen Gleichungspolynom und der ersten abgeleiteten Function desselben das größte gemeinschaftliche Maß und zerlege dieses in seine einfachen Faktoren. Ist alsdann z. B.

$$(x - w_1) (x - w_2)^r (x - w_3)^s$$

jenes Maß, so hat die vorgelegte Gleichung zweimal die Wurzel w_1, $(r + 1)$ mal die Wurzel w_2 und $(s + 1)$ mal die Wurzel w_3.

Anmerkung. Die Richtigkeit des eben mitgetheilten Satzes läßt sich auch auf folgende Art nachweisen:

Sind $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$

die n Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3) \ldots (x - w_n) = 0 \ldots (1)$$

und man bezeichnet die Summe der Combinationen sämmtlicher Wurzeln ohne Wiederholung zur ersten, zweiten, dritten, ... nten Klasse bezüglich durch A, B, C, ... N, so ist nach §. 95. Zus. 4 die Gleichung (1) auch ausgedrückt durch

$$f(x) = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \ldots \pm N = 0 \ldots (2).$$

Entwickelt man nun die Produktensumme

$$\left.\begin{array}{l} (x - w_2)(x - w_3)(x - w_4) \ldots (x - w_n) \\ + (x - w_1)(x - w_3)(x - w_4) \ldots (x - w_n) \\ + (x - w_1)(x - w_2)(x - w_4) \ldots (x - w_n) \\ + \ldots \\ + (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3) \ldots (x - w_{n-1}) \end{array}\right\} \ldots (3)$$

so erhält man einen Ausdruck von der Form

$$nx^{n-1} + \mathfrak{A}x^{n-2} + \mathfrak{B}x^{n-3} + \mathfrak{C}x^{n-4} + \ldots + \mathfrak{M} \ldots (4).$$

Die Coefficienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots \mathfrak{M}$ ergeben sich aus folgender Betrachtung: Da in dem ersten Produkte $(x - w_1)$, im zweiten $(x - w_2)$ u. s. f. fehlt, so ist

$$\mathfrak{A} = -(nA - A) = -(n - 1).A.$$

Bei der Bildung des Coefficienten $\mathfrak{B}$ ersieht man, daß jede Complexion der Combination sämmtlicher Wurzeln zur zweiten Klasse ohne Wiederholung nur $(n - 2)$ mal vorkommt, indem z. B. $w_1 w_2$ bei der Entwickelung des ersten und zweiten, $w_2 w_3$ bei der des zweiten und dritten Produktes ꝛc. nicht erscheint, daß also zu setzen ist:

$$\mathfrak{B} = (n - 2)\,B.$$

Analog kommt bei der Bildung des Coefficienten $\mathfrak{C}$ jede Complexion aller Combinationen der n Wurzeln zur dritten Klasse ohne Wiederholung nur $(n - 3)$ mal vor, indem z. B. $w_1\ w_2\ w_3$ bei der Entwickelung des ersten, zweiten und dritten Produktes nicht auftritt u. s. w. Da ferner $\mathfrak{C}$ jedenfalls negativ wird, so hat man

$$\mathfrak{C} = -(n - 3)\,C.$$

Aehnlich ergeben sich die übrigen Coefficienten und nach dem klar hervortretenden Bildungsgesetze derselben kann man somit statt der Produktensumme (3) nach (4) auch schreiben:

$$nx^{n-1} - (n - 1)\,Ax^{n-2} + (n - 2)\,Bx^{n-3} - (n - 3)\,Cx^{n-4} + \ldots (5).$$

In (5) erkennen wir aber sofort die erste abgeleitete Funktion $f_1(x)$ des Gleichungspolynoms $f(x)$ der Gleichung (2).

Nehmen wir nun an, es sei

$$w_1 = w_2 = w_3 = \ldots = w_m = \alpha$$

also α eine mfache Wurzel der Gleichung (1), so geht aus der Vergleichung des Gleichungspolynoms derselben mit (3) unmittelbar hervor, daß alsdann $(x - \alpha)^{m-1}$ ein gemeinschaftlicher Theiler von $f(x)$ und $f_1(x)$ sein muß.

Beispiel.

Um zu untersuchen, ob die Gleichung

$$f(x) = x^7 - 6x^6 + 5x^5 + 26x^4 - 55x^3 - 2x^2 + 39x - 18 = 0$$

gleiche Wurzeln hat, bilde man

$$f_1(x) = 7x^6 - 36x^5 + 25x^4 + 104x^3 - 165x^2 - 4x + 39$$

und bestimme nun zu $f(x)$ und $f_1(x)$ das größte gemeinschaftliche Maß. Man findet dafür

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x - 1)^2 (x - 3)$$

und die Gleichung hat somit dreimal die Wurzel 1 und zweimal die Wurzel 3. Da die beiden anderen Wurzeln — 1 und — 2 sind, so ist nach §. 95 das Gleichungspolynom

$$f(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 1)^3 (x - 3)^2.$$

§. 107. Aufgaben zur Uebung.

Die in nachstehenden Gleichungen enthaltenen vielfachen Wurzeln zu bestimmen:

1) $x^3 - 6x^2 + 32 = 0$;
2) $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6 = 0$;
3) $x^4 - 24x^3 + 210x^2 - 784x + 1029 = 0$;
4) $x^4 - 14x^3 + 69x^2 - 140x + 100 = 0$;
5) $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 144 = 0$;
6) $x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8 = 0$.

§. 108. Reciproke Gleichungen.

1) Unter einer *reciproken* Gleichung versteht man jede Gleichung von der Form:

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots \pm A_2 x^2 \pm A_1 x \pm 1 = 0 \quad (1)$$

Je zwei gleichweit von den äußersten Gliedern entfernte Coefficienten sind also dem Absolutwerthe nach einander gleich; die Zeichen derselben können übereinstimmen oder entgegengesetzt sein. Haben *sämmtliche* gleichnamige Coefficienten *entgegengesetzte* Zeichen und ist die Gleichung von *geradem* Grade, so muß natürlich das Mittelglied fehlen, indem dieses sonst gleichzeitig positiv und negativ sein müßte.

2) *Ist w eine Wurzel einer reciproken Gleichung, so ist auch $\frac{1}{w}$ eine Wurzel derselben.*

Denn führt man in die Gleichung (1) statt x den Werth w ein, so geht dieselbe über in:

$$w^n + A_1 w^{n-1} + A_2 w^{n-2} + \dots \pm A_2 w^2 \pm A_1 w \pm 1 = 0 \quad (2)$$

und wenn man $\frac{1}{w}$ statt x in das Gleichungspolynom der Gl. (1) substituirt, so verwandelt sich dasselbe in:

$$\frac{1}{w^n} + \frac{A_1}{w^{n-1}} + \frac{A_2}{w^{n-2}} + \dots \pm \frac{A_2}{w^2} \pm \frac{A_1}{w} \pm 1$$

oder in

$$\frac{1}{w^n}(1 + A_1 w + A_2 w^2 + \ldots \pm A_2 w^{n-2} \pm A_1 w^{n-1} \pm w^n).$$

Nun ist aber der innerhalb der Klammern dieses Werthes stehende Ausdruck nach (2) Null, folglich wird das Polynom der Gl. (1) für $x = \frac{1}{w}$ in Null übergeführt und es ist somit auch $\frac{1}{w}$ eine Wurzel dieser Gleichung.

3) **Jede reciproke Gleichung von ungeradem Grade hat die Wurzel + 1 oder — 1, je nachdem die gleichnamigen Coefficienten entgegengesetzte oder einerlei Zeichen haben.**

Denn führt man bezüglich + 1 oder — 1 statt x in die entsprechende Gleichung ein, so werden alle Glieder, welche die Unbekannte in gerader Potenz enthalten, positiv, alle anderen dagegen negativ und die algebraische Summe sämmtlicher Glieder ist somit Null.

4) Das Gleichungspolynom einer reciproken Gleichung von ungeradem Grade ist daher durch $x - 1$ oder $x + 1$ theilbar, je nachdem die gleichnamigen Coefficienten entgegengesetzte oder einerlei Zeichen haben. Da durch diese Division immer eine Gleichung vom geradem Grade erhalten wird, so werden sich unsere Untersuchungen in der Folge auch nur auf solche Gleichungen oder auf Gleichungen von der Form

$$x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + 1 = 0 \ldots (3)$$

erstrecken*).

*) Wir können nämlich als allgemeine Form eine Gleichung wählen, bei welcher alle gleichnamigen Coefficienten *einerlei* Zeichen haben, da sich im anderen Falle die Gleichung stets auf die erwähnte Form zurückführen läßt. Denn ist z. B.

$$x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \ldots + A_{n-1} x^{n+1} - A_{n-1} x^{n-1} - \ldots - A_2 x^2 - A_1 x - 1 = 0$$

die gegebene Gleichung, welche nach Obigem kein Mittelglied hat, und man schreibt dafür

$$(x^{2n} - 1) + A_1 x(x^{2n-2} - 1) + A_2 x^2(x^{2n-4} - 1) + \ldots + A_{n-1} x^{n-1}(x^2 - 1) = 0$$

so ersieht man hieraus sofort, daß das Polynom durch $(x^2 - 1)$ theilbar ist, also sowohl für $x = + 1$ als $x = - 1$ Null wird und somit + 1 und — 1 zwei Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind. Führt man die angeführte

5) Dividirt man die Gleichung (3) durch x^n, so folgt:

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + A_1\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + A_2\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \ldots\ldots$$
$$+A_{n-2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + A_{n-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + A_n = 0 \ldots(4)$$

Setzt man hierin

$$x + \frac{1}{x} = y \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

so wird

$$\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right)y = \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= x^m + \frac{1}{x^m} + x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}$$

woraus sich allgemein ergibt:

$$x^m + \frac{1}{x^m} = \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right)y - \left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right)$$

Substituirt man nun in diese Gleichung der Reihe nach $m = 2, 3, 4, \ldots. n$, so resultirt:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)y - \left(1 + 1\right) = y^2 - 2$$
$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)y - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= \left(y^2 - 2\right)y - y = y^3 - 3y$$
$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)y - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \left(y^3 - 3y\right)y - \left(y^2 - 2\right) = y^4 - 4y^2 + 2$$

u. s. w.

Durch Einführung dieser Werthe in die Gleichung (4) gelangt man nun zu einer Gleichung vom $n$ten Grade in y und aus den Werthen von y ergeben sich dann leicht mittelst Gleichung (5) die entsprechenden von x.

Division aus, so gelangt man zu einer Gleichung von der in obiger Entwickelung vorausgesetzten Form.

So führt z. B. die Gleichung

$$x^8 + A_1x^7 + A_2x^6 + A_3x^5 - A_3x^3 - A_2x^2 - A_1x - 1 = 0$$

durch Division mit $(x^2 - 1)$ auf die Gleichung:

$$x^6 + A_1x^5 + (A_2 + 1)x^4 + (A_3 + A_1)x^3 + (A_2 + 1)x^2 + A_1x + 1 = 0$$

Dieses Verfahren gibt uns demnach ein Mittel an die Hand, jede reciproke Gleichung von einem geraden Grade auf eine andere zurückzuführen, deren Ordnungsexponent nur halb so groß ist.

Nach dem im ersten Theile dieses Lehrbuches über die Auflösung der Gleichungen Mitgetheilten und unter Berücksichtigung des oben in 3) Angeführten, sind wir daher im Stande reciproke Gleichungen bis zum 9ten Grade allgemein aufzulösen.

Beispiele.

1) Es sei

$$x^4 - \frac{319}{28} x^3 + \frac{453}{14} x^2 - \frac{319}{28} x + 1 = 0$$

die gegebene Gleichung.

Schreibt man dafür

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{319}{28}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{453}{14} = 0$$

und setzt nun

$$x + \frac{1}{x} = y$$

also

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

so erhält man:

$$y^2 - 2 - \frac{319}{28} y + \frac{453}{14} = 0$$

oder

$$y^2 - \frac{319}{28} y + \frac{425}{14} = 0$$

und hieraus für y die beiden Werthe $\frac{17}{4}$ und $\frac{50}{7}$.

Setzt man zunächst $y = \frac{17}{4}$, so erhält man aus

$$x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4}$$

oder

$$x^2 - \frac{17}{4} x + 1 = 0$$

für x die Werthe 4 und $\frac{1}{4}$.

Substituirt man dagegen in dieselbe Gleichung $y = \frac{50}{7}$, so wird

$$x + \frac{1}{x} = \frac{50}{7}$$

oder $$x^2 - \frac{50}{7}x + 1 = 0$$

und hiernach $x = 7$ oder $\frac{1}{7}$.

Die 4 Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind somit:

$$4, \frac{1}{4}, 7, \frac{1}{7},$$

2) Ist

$$x^5 + \frac{37}{8}x^4 - \frac{383}{16}x^3 + \frac{383}{16}x^2 - \frac{37}{8}x - 1 = 0$$

die gegebene Gleichung, so entspricht derselben nach obigem Satze 3 die Wurzel $+ 1$ und wenn man deshalb mit $(x - 1)$ dividirt, so kommt:

$$x^4 + \frac{45}{8}x^3 - \frac{293}{16}x^2 + \frac{45}{8}x + 1 = 0.$$

oder $$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{45}{8}\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{293}{16} = 0$$

oder, wenn man $x + \frac{1}{x} = y$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

setzt,

$$y^2 + \frac{45}{8}y - \frac{325}{16} = 0.$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind aber $\frac{5}{2}$ und $-\frac{65}{8}$ und man erhält somit aus den beiden Gleichungen

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \text{ und } x + \frac{1}{x} = -\frac{65}{8}$$

für x bezüglich 2 und $\frac{1}{2}$ oder -8 und $-\frac{1}{8}$.

Die 5 Wurzeln der gegebenen Gleichung sind daher:

$$1, 2, \frac{1}{2}, -8, -\frac{1}{8}.$$

§. 109. Aufgaben zur Uebung.

Die Wurzeln der nachstehenden reciproken Gleichungen zu bestimmen:

1) $x^3 - \frac{37}{12}x^2 + \frac{37}{12}x - 1 = 0.$

2) $x^3 - \frac{19}{10}x^2 - \frac{19}{10}x + 1 = 0.$

3) $x^4 - \frac{99}{8} x^3 + \frac{1169}{32} x^2 - \frac{99}{8} x + 1 = 0.$

4) $x^4 - \frac{135}{14} x^3 + \frac{139}{7} x^2 - \frac{135}{14} x + 1 = 0.$

5) $x^5 - \frac{173}{30} x^4 + \frac{373}{30} x^3 - \frac{373}{30} x^2 + \frac{173}{30} x - 1 = 0.$

6) $x^5 + \frac{79}{14} x^4 - \frac{157}{14} x^3 - \frac{157}{14} x^2 + \frac{79}{14} x + 1 = 0.$

7) $x^6 - 9x^5 + 27x^4 - 38x^3 + 27x^2 - 9x + 1 = 0.$

8) $x^8 - \frac{43}{12} x^7 - \frac{223}{24} x^6 + \frac{691}{12} x^5 - \frac{1097}{12} x^4 + \frac{691}{12} x^3 - \frac{223}{24} x^2 - \frac{43}{12} x + 1 = 0.$

C. Transformation der Gleichungen.

§. 110. Aufgabe.

Die Gleichung

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln um a kleiner sind, als die der gegebenen.

Auflösung.

Bezeichnet man durch y die Unbekannte der neuen Gleichung, so soll nach der Bedingung

$$y = x - a,$$

also

$$x = a + y$$

werden und die fragliche Gleichung wird somit erhalten, wenn man in §. 86 5) a statt x und y statt δ substituirt.

Es wird demnach

$$f(y) = f(a) + y f_1(a) + y^2 f_2(a) + \dots + y^{n-1} f_{n-1}(a) + y^n f_n(a) = 0.$$

Beispiel.

Um die Gleichung

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0,$$

deren Wurzeln 1, 2, 3 und — 2 heißen, in eine andere f(y) = 0 zu verwandeln, deren Wurzeln sämmtlich um 4 kleiner sind, bilde man zunächst:

$f(x) \;= x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$
$f_1(x) = 4x^3 - 12x^2 - 2x + 16$
$f_2(x) = 6x^2 - 12x - 1$
$f_3(x) = 4x - 4$
$f_4(x) = 1$
und bestimme hieraus
$f(4) = 36,\ f_1(4) = 72,\ f_2(4) = 47,\ f_3(4) = 12,\ f_4(4) = 1,$
so folgt als neue Gleichung:
$f(y) = y^4 + 12y^3 + 47y^2 + 72y + 36 = 0.$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind: $-3, -2, -1$ und $-.6$, also in der That um 4 kleiner als die der vorgelegten Gleichung $f(x) = 0$.

Zusatz.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, daß die eben gelehrte Transformationsmethode in den meisten Fällen sehr weitläufig ist. Rascher führt das von Burdan gelehrte Verfahren zum Ziele.

Faßt man nämlich die transformirte Gleichung etwas näher ins Auge und vergleicht das erste Glied, so wie sämmtliche Coefficienten der folgenden Glieder mit dem Reste, welchen wir in dem Zus. des §. 93 nach der Horner'schen Divisionsmethode des Polynoms $f(x)$ durch $(x - a)$ erhalten haben; so erkennt man leicht, daß das erste Glied $f(a)$ nichts Anderes ist, als der Rest, welcher bleibt, wenn wir $f(x)$ durch $(x - a)$ dividiren, und daß man nur den jedesmaligen Quotienten wiederum durch $(x - a)$ zu dividiren hat, um in den Resten der Reihe nach die auf einander folgenden Coefficienten zu erhalten.

Wenden wir dieses Verfahren auf obiges Beispiel an, so erhalten wir:

4		4	4	4
-4	$-4 + 4 = 0$	$0 + 4 = 4$	$4 + 4 = 8$	$8 + 4 = 12$
-1	$4.0 - 1 = -1$	$4.4 - 1 = 15$	$4.8 + 15 = 47$	
16	$4.-1 + 16 = 12$	$4.15 + 12 = 72$		
-12	$4.12 - 12 = 36$			

und hiernach als transformirte Gleichung:

$$y^4 + 12y^3 + 47y^2 + 72y + 36 = 0,$$

wie vorhin

Hat das erste Glied x^n einen von 1 verschiedenen Coefficienten, so bleibt das Verfahren genau dasselbe.

Um z. B. die Gleichung

$$4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 = 0$$

in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln um 3 kleiner sind, hat man:

	3	3	3	3
4	4	4	4	4
− 3	9	21	33	
− 4	23	86		
3	72			

und die transformirte Gleichung heißt somit:

$$4y^3 + 33y^2 + 86y + 72 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind: -4, $-2\frac{1}{4}$, 2, während -1, $\frac{3}{4}$, 1 die der ursprünglichen waren.

§. 111. Aufgabe.

Eine Gleichung $f(x) = 0$ in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln um a größer sind, als die der gegebenen Gleichung.

Auflösung.

Verfahre genau wie in der vorhergehenden Aufgabe, setze aber $-$ a statt a.

Beispiel.

Soll die Gleichung

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

in eine andere verwandelt werden, deren Wurzeln um 2 größer sind, so hat man:

	− 2	− 2	− 2
− 1	− 3	− 5	− 7
− 4	2	12	
4	0		

und die transformirte Gleichung heißt daher:

$$y^3 - 7y^2 + 12y = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind: 0, 3, 4, während die der vorgelegten -2, 1, 2 heißen.

§. 112. Aufgaben zur Uebung.

1) Die Gleichung

$$x^4 - 8x^3 - 25x^2 + 44x + 60 = 0,$$

deren Wurzeln -1, -3, 2 und 10 sind, in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln α) um 1, β) um 2, γ) um 5, δ) um 7 kleiner ausfallen.

2) Man soll die Gleichung

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 12x^3 - 23x^2 + 16x - 4 = 0$$

in eine andere verwandeln, deren Wurzeln α) um 3, β) um 4, γ) um 6 kleiner sind.

3) Eine Gleichung aufzustellen, deren Wurzeln α) um 2, β) um 4, γ) um 6 größer sind, als die Wurzeln der Gleichung

$$x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0.$$

4) Die Gleichung

$$4x^4 - 7x^3 - 13x^2 + 28x - 12 = 0$$

in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln α) um 4 kleiner, β) um 5 größer sind.

§. 113. Aufgabe.

Die Gleichung $f(x) = 0$ in eine andere $f(y) = 0$ zu verwandeln, deren Wurzeln amal so groß sind als die jener Gleichung.

Auflösung.

Führen wir in die Gleichung

$$f(x) = x + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0$$

$\frac{y}{a}$ statt x ein, so geht dieselbe über in:

$$\frac{y^n}{a^n} + \frac{A_1y^{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{A_2y^{n-2}}{a^{n-2}} + \ldots + \frac{A_{n-1}y}{a} + A_n = 0$$

oder in:

$$y^n + A_1ay^{n-1} + A_2a^2y^{n-2} + \ldots + A_{n-1}a^{n-1}y + A_na^n = 0.$$

Um daher die verlangte Gleichung zu erhalten, multiplicire man die Glieder der gegebenen Gleichung der Reihe nach mit

$$1,\ a,\ a^2,\ \ldots\ a^{n-1},\ a^n,$$

wobei jedoch die fehlenden Glieder mit in Betracht zu ziehen sind.

Beispiele.

1) Um die Gleichung

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0,$$

deren Wurzeln 1, 2, 3 und -2 sind, in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln 3 mal so groß sind, schreibe man

$$\begin{array}{l} y^4 - 4\,y^3 - y^2 + 16\,y - 12 \\ 1 \quad\; 3 \qquad 9 \qquad 27 \qquad 81 \end{array}$$

so folgt: $y^4 - 12y^3 - 9y^2 + 432y - 972 = 0$
als die verlangte Gleichung, deren Wurzeln nun 3, 6, 9 und — 6 heißen.

2) Soll die Gleichung

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0,$$

deren Wurzeln 1, 2, — 1, — 2 heißen, in eine andere verwandelt werden, deren Wurzeln 4 mal so groß sind, so hat man zu schreiben:

$$\begin{array}{l} y^4 \quad - 5\,y^2 \quad + \quad 4 \\ 1 \;\; 4 \quad 16 \quad 64 \qquad 256 \end{array}$$

woraus folgt: $y^4 - 80y^2 + 1024 = 0$
als Gleichung, deren Wurzeln 4, 8, — 4 und — 8 sind.

§. 114. Aufgaben zur Uebung.

1) Die Gleichung

$$x^4 - 9x^3 + 29x^2 - 39x + 18 = 0$$

in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln α) 2, β) 3, γ) 5 mal so groß sind.

2) Man soll die Gleichung

$$x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 7x - 2 = 0$$

in eine andere verwandeln, deren Wurzeln α) $\frac{1}{3}$, β) $\frac{1}{2}$, γ) $\frac{3}{4}$, δ) 4 mal so groß sind.

§. 115. Aufgabe.

Eine Gleichung besitzt gebrochene Coefficienten, man soll dieselbe in eine andere verwandeln, deren sämmtliche Coefficienten ganze Zahlen sind und deren erstes Glied den Coefficienten 1 hat.

Auflösung.

Ist

$$x^n + \frac{a_1}{b_1}\,x^{n-1} + \frac{a_2}{b_2}\,x^{n-2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\,x + \frac{a_n}{b_n} = 0$$

die vorgelegte Gleichung, und m das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner $b_1, b_2, b_3, \ldots b_{n-1}, b_n$, so verwandle man die gegebene Gleichung nach §. 113 in eine andere, deren Wurzeln m mal so groß sind. Man erhält dafür

$$y^n + \frac{a_1 m}{b_1}\,y^{n-1} + \frac{a_2 m^2}{b_2}\,y^{n-2} + \ldots + \frac{a_{n-1} m^{n-1}}{b_{n-1}}\,y + \frac{a_n m^n}{b_n} = 0,$$

also eine Gleichung, in welcher sämmtliche Coefficienten ganze Zahlen sind.

Beispiel.

Ist

$$x^4 - \frac{3}{2} x^3 + \frac{5}{3} x^2 - \frac{3}{4} x + 2 = 0$$

die gegebene Gleichung, und man verwandelt dieselbe nach §. 113 in eine andere, deren Wurzeln 12 mal so groß sind, so folgt:

$$y^4 - 18y^3 + 240y^2 - 1296y + 41472 = 0$$

als Gleichung, welche nur ganzzahlige Coefficienten hat.

Anmerkung. Häufig erzielt man eine der verlangten Bedingung entsprechende Gleichung durch Anwendung einer kleineren Zahl als des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen sämmtlicher Nenner.

Verwandelt man z. B. obige Gleichung in eine andere, deren Wurzeln 6 mal so groß sind, so erhält man

$$y^4 - 9y^3 + 60y^2 - 162y + 2592 = 0$$

als verlangte Gleichung.

Ist ferner die Gleichung

$$x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{5}{4} x - \frac{3}{8} = 0$$

gegeben, so resultirt schon eine von gebrochenen Coefficienten freie Gleichung, wenn man eine andere bestimmt, deren Wurzeln doppelt so groß sind, als die der vorgelegten. Es wird alsdann

$$y^3 - 3y^2 + 5y - 3 = 0.$$

§. 116. Aufgaben zur Uebung.

Nachstehende Gleichungen von den Brüchen zu befreien und anzugeben, in welchem Verhältnisse die Wurzeln der neuen Gleichung zu den Wurzeln der gegebenen Gleichung stehen:

1) $x^3 - \frac{3}{2} x^2 - 4x + \frac{3}{4} = 0$;
2) $x^4 + \frac{5}{8} x^3 - \frac{7}{16} x^2 + \frac{3}{4} x - 5 = 0$;
3) $x^5 + \frac{2}{3} x^4 + \frac{5}{9} x^2 + \frac{7}{27} x - 4 = 0$;
4) $x^5 + \frac{4}{5} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{7}{10} x + \frac{11}{20} = 0$;
5) $x^5 + \frac{1}{6} x^4 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{18} x^2 + \frac{1}{12} x + 3 = 0$.

§. 117. Aufgabe.

Eine gegebene Gleichung in eine andere zu verwandeln, bei welcher das zweite Glied fehlt.

Auflösung.

Ist

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

die gegebene Gleichung und man setzt hierin

$$x = y + a,$$

wo a eine noch zu bestimmende constante Zahl bedeutet, so folgt

$$y^n + ny^{n-1}\,a + \binom{n}{2}\,y^{n-2}\,a^2 + \ldots + a^n + A_1y^{n-1}$$
$$+ (n-1)\,A_1y^{n-2}\,a + \ldots + a^{n-1} + \ldots + A_n = 0$$

oder

$$y^n + (na + A_1)\,y^{n-1} + \ldots + A_n = 0.$$

Soll nun hierin das zweite Glied verschwinden, so muß a so bestimmt werden, daß man hat:

$$na + A_1 = 0$$

oder

$$a = -\frac{A_1}{n}.$$

Um demnach aus der Gleichung $f(x) = 0$ eine andere $f(y) = 0$ zu entwickeln, deren zweites Glied fehlt, führe man in jene für x den Werth $y - \frac{A_1}{n}$ ein; die Wurzeln der neuen Gleichung sind alsdann um $\frac{A_1}{n}$ größer als die der vorgelegten und bei der Transformation kann also das in den §§. 110 und 111 gelehrte Verfahren in Anwendung gebracht werden.

Beispiele.

1) Soll die Gleichung

$$x^3 + 3x^2 - 16x + 12 = 0,$$

deren Wurzeln 1, 2 und — 6 heißen, in eine andere verwandelt werden, bei welcher das zweite Glied fehlt, so hat man nach Obigem

$$x = y - \tfrac{3}{3} = y - 1$$

zu substituiren. Da also $y = x + 1$, so erhält man nach §. 111:

— 1	— 1	— 1	
8	2	1	0
— 16	— 18	— 19	
12	30		

und hiernach die verlangte Gleichung

$$y^3 - 19y + 30 = 0,$$

deren Wurzeln 2, 3 und — 5 sind.

2) Um die Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 4x - 5 = 0$$

in eine andere zu verwandeln, deren zweites Glied fehlt, setze man

$$x = y - \frac{-6}{3} = y + 2$$

also

$$y = x - 2,$$

so folgt nach §. 110:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \underbrace{2} & & \underbrace{2} & & \underbrace{2} & \\
-6 & & -4 & & -2 & & 0 \\
4 & & -4 & & -8 & & \\
-5 & & -13 & & & &
\end{array}$$

und hiernach als verlangte Gleichung:

$$y^3 - 8y - 13 = 0.$$

3) Soll $x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 32x - 128 = 0$ vom zweiten Gliede befreit werden, so setze man

$$x = y + \frac{10}{4} = y + \frac{5}{2}$$

also

$$y = x - \frac{5}{2},$$

somit nach §. 110:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \underbrace{\tfrac{5}{2}} & & \underbrace{\tfrac{5}{2}} & & \underbrace{\tfrac{5}{2}} & & \underbrace{\tfrac{5}{2}} & \\
-10 & & -\frac{15}{2} & & -5 & & -\frac{5}{2} & & 0 \\
24 & & \frac{21}{4} & & -\frac{9}{4} & & -\frac{33}{4} & & \\
32 & & \frac{361}{8} & & \frac{79}{2} & & & & \\
-128 & & -\frac{243}{16} & & & & & &
\end{array}$$

und erhält

$$y^4 - \frac{33}{4}y^2 + \frac{79}{2}y - \frac{243}{16} = 0$$

als gewünschte Gleichung.

§. 118. Aufgaben zur Uebung.

Jede der nachstehenden Gleichungen in eine andere zu verwandeln, bei welcher das zweite Glied fehlt:

1) $x^3 + 12x^2 - 8x + 4 = 0$;
2) $x^3 - 15x^2 + 12 = 0$;
3) $x^4 + 24x^3 - 14x^2 + 8x - 2 = 0$;
4) $x^4 - 2x^3 + 6x + 10 = 0$;
5) $x^5 + 3x^4 - 5x^2 - 4 = 0$;
6) $x^6 - 12x^5 + 15x^3 - 6x + 4 = 0$;
7) $x^6 + 5x^5 - x + 3 = 0$.

D. Auflösung der numerischen Gleichungen.

§. 119. Erklärung.

Eine Gleichung, deren Coefficienten bestimmte Zahlen sind, heißt eine numerische Gleichung.

Wir haben bereits im ersten Theile dieses Lehrbuches die allgemeinen Auflösungsmethoden für Gleichungen dieser Art kennen gelernt, wenn solche den vierten Grad nicht übersteigen und wollen nun zusehen, wie man bei der Bestimmung der Unbekannten zu verfahren hat, wenn die Gleichung von einem höheren Grade als vom vierten ist. Wenn es auch nicht möglich ist, eine allgemeine Methode anzugeben, nach welcher jede höhere Gleichung aufgelöst werden kann, so sind wir doch im Stande, im Falle die betreffende Wurzel irrational ist, dieselbe näherungsweise so genau anzugeben, als es eine aus der Praxis entnommene Aufgabe nur wünschen läßt. Die entsprechenden Verfahrungsarten, welche wir später werden kennen lernen, führen in der Regel auch bei Gleichungen des dritten und vierten Grades viel rascher zur Auflösung, als die früher gelehrten allgemeinen Methoden, so daß man in den meisten Fällen gut thun wird, auch diese Gattung von Gleichungen nach den zu lehrenden Näherungsmethoden aufzulösen.

Sind, wie wir dies in der Folge stets voraussetzen, sämmtliche Coefficienten der Gleichung $f(x) = 0$ reelle und zwar ganze, positive oder negative rationale Zahlen*), so können

---

*) Diese Voraussetzung ist erlaubt. Denn hat zunächst die Gleichung imaginäre Coefficienten, so läßt sich dieselbe immer in eine andere mit reellen Coefficienten auf folgende Art umwandeln.

Ist $x^n + (A_1 + B_1 i)\, x^{n-1} + (A_2 + B_2 i)\, x^{n-2} + \ldots + (A_n + B_n i) = 0$

die gegebene Gleichung und man trennt die reellen und imaginären Glieder, so folgt:

$$(x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n) + (B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots + B_n)\, i = 0.$$

Multiplicirt man nun diese Gleichung mit der zugeordneten:

$$(x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n) - (B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots + B_n)\, i = 0$$

so erhält man eine Gleichung vom $2n$ten Grade, mit lauter reellen

die Wurzeln derselben theilweise oder alle rationale, irrationale oder imaginäre Zahlen sein.

a) Bestimmung der rationalen Wurzeln.

§. 120. Auflösung durch Faktorenzerlegung des letzten Gliedes.

1) Man bringe zunächst die vorgelegte Gleichung auf die in §. 86 (1) angegebene Form und beseitige nach §. 115 die etwa noch in derselben vorkommenden gebrochenen Coefficienten, so müssen nach §. 100 sämmtliche rationale Wurzeln, welche der resultirenden Gleichung entsprechen, ganze Zahlen und nach §. 95. Zus. 4 zugleich Faktoren des letzten Gliedes sein.

Zur Aufsuchung der Wurzeln einer solchen-Gleichung ergibt sich hiernach unmittelbar folgendes Verfahren:

Man zerlege das letzte Glied derselben in seine einfachen und zusammengesetzten Faktoren, und substituire alsdann, wenn der Gleichung sowohl positive als negative Wurzeln entsprechen können, die innerhalb der Grenzen der positiven und negativen Wurzeln liegenden Faktoren der Reihe nach, sowohl positiv als negativ genommen, in die vorgelegte Gleichung statt der Unbekannten. Jeder Faktor, welcher das Gleichungspolynom dabei auf Null bringt, ist alsdann eine Wurzel der betreffenden Gleichung.

Coefficienten, indem $i^2 = -1$ ist. Unter den 2n Wurzeln dieser Gleichung befinden sich aber die n Wurzeln der vorgelegten.

Ist z. B. $x^2 - 2ix + 3 = 0$ die gegebene Gleichung, so folgt aus

$$(x^2 + 3 - 2ix)(x^2 + 3 + 2ix) = 0$$

die Gleichung

$$x^4 + 10x^2 + 9 = 0$$

oder wenn man $x^2 = y$ setzt,

$$y^2 + 10y + 9 = 0.$$

Man findet hieraus

$$y_1 = -1,\ y_2 = -9.$$

Also ist $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$ oder $x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$. Führt man der Reihe nach diese Werthe in die vorgelegte Gleichung ein, so ergibt sich leicht, daß $-i$ und $3i$ die beiden Wurzeln derselben sind.

Hat die Gleichung irrationale Coefficienten, so können wir solche stets durch Brüche hinreichend genau ausdrücken und dann die Gleichung nach §. 115 in eine andere geordnete mit ganzen Coefficienten verwandeln.

Um auf diese Weise z. B. die rationalen Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = x^4 + 9x^3 - 46x^2 - 96x + 288 = 0$$

zu ermitteln, berücksichtige man zunächst, daß dieselben positiv und negativ sein können. Die Faktoren von 288 sind nun:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 64, 128, 288

und man erhält:

für $x = 1 : f(x) = 1 + 9 - 46 - 96 + 288 = 156$,
" $x = -1 : f(x) = 1 - 9 - 46 + 96 + 288 = 330$,
" $x = 2 : f(x) = 16 + 72 - 184 - 192 + 288 = 0$,
" $x = -2 : f(x) = 16 - 72 - 184 + 192 + 288 = 240$,
" $x = 3 : f(x) = 81 + 243 - 414 - 288 + 288 = -93$,
" $x = -3 : f(x) = 81 - 243 - 414 + 288 + 288 = 0$,
" $x = 4 : f(x) = 256 + 576 - 736 - 384 + 288 = 0$.

Fährt man in dieser Weise fort zu operiren, so findet man, daß wieder für $x = -12$, $f(x) = 0$ wird. Es sind somit 2, −3, 4, −12 die vier Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

2) Wie aus dem eben behandelten Beispiele hervorgeht, ist die zur Prüfung der Faktoren in Anwendung gebrachte Substitution in den meisten Fällen sehr langwierig und zeitraubend. Man gelangt viel rascher zum Ziele, wenn man die Untersuchung, ob einer der Faktoren eine Wurzel sei, nach der im §. 101 vorgetragenen Methode vornimmt.

Um hiernach z. B. die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30 = 0$$

zu finden, bilde man zunächst von 30 die Faktoren:

1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30,

so folgt nach §. 101:

$x=1: \frac{30}{1}+11=41, \frac{41}{1}-19=22, \frac{22}{1}+1=23;$

$x=-1: \frac{30}{-1}+11=-19, \frac{-19}{-1}-19=0, \frac{0}{-1}+1=1, \frac{1}{-1}=-1;$

$x=2: \frac{30}{2}+11=26, \frac{26}{2}-19=-6, \frac{-6}{2}+1=-2, \frac{-2}{2}=-1;$

$x=-2: \frac{30}{-2}+11=-4, \frac{-4}{2}-19=-21,$

$x=3: \frac{30}{3}+11=21, \frac{21}{3}-19=-12, \frac{-12}{3}+1=-3, \frac{-3}{3}=-1;$

$x=-3: \frac{30}{-3}+11=1,$

$x=4$ und $x=-4$ führen sogleich auf Brüche,

$x=5: \frac{30}{5}+11=17,$

$x = -5$: $\frac{30}{-5} + 11 = 5, \frac{5}{-5} - 19 = -20, \frac{-20}{-5} + 1 = 5, \frac{5}{-5} = -1.$
Die 4 Wurzeln sind daher: — 1, 2, 3, — 5.

Vorstehende Operation läßt sich auch mit allen Faktoren zugleich auf folgende Art vornehmen:

1	—1	2	—2	3	—3	5	—5	6	—6	10	—10	15	—15	30	—30
30	—30	15	—15	10	—10	6	—6	5	—5	3	—3	2	—2	30	—30
41	—19	26	—4	21	1	17	5	16	6	14	8	13	9	41	—19
41	19	13	2	7			—1		—1						
22	0	—6	—17	—12			—20		—20						
22	0	—3		—4			4								
23	1	—2		—3			5								
	—1	—1		—1			—1								

Bezüglich der Prüfung der Faktoren + 1 und — 1 bedient man sich einfacher der Substitution derselben in das Gleichungspolynom.

3) Hat man alle Wurzeln $w_1, w_2, \ldots w_{n-2}$ einer Gleichung nten Grades bis auf zwei ermittelt, so lassen sich diese beiden auch leicht nach §. 95 dadurch bestimmen, daß man das Gleichungspolynom durch das Produkt

$$(x - w_1)\ (x - w_2)\ \ldots\ (x - w_{n-2})$$

dividirt und den erhaltenen Quotienten gleich Null setzt. Die Wurzeln der hierdurch resultirenden quadratischen Gleichung sind zugleich die noch fehlenden der ursprünglichen Gleichung.

Sind z. B. die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 12 = 0$$

aufzusuchen und man bildet von 12 die Faktoren: 1, 2, 3, 4, 6, 12, so hat man:

1	—1	2	—2	3	—3	4	—4	6	—6	12	—12
—12	12	—6	6	—4	4	—3	3	—2	2	—1	1
—8	16	—2	10	0	8	1	7	2	6	3	5
—8	—16	—1	—5	0					—1		
—9	—17	—2	—6	—1					—2		
—9	18	—1	3								
—10	17	—2	2								
		—1	—1								

Zwei der Wurzeln sind daher 2 und — 2. Dividirt man nun das Gleichungspolynom $x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 12$ durch das Produkt $(x - 2)\ (x + 2) = x^2 - 4$, so resultirt $x^2 - x + 3$ als Quotient und aus der quadratischen Gleichung

$$x^2 - x + 3 = 0$$

ergeben sich die beiden imaginären Wurzeln;

$$\frac{1+\sqrt{-11}}{2} \text{ und } \frac{1-\sqrt{-11}}{2}.$$

Anmerkung. Auch mittelst der höheren arithmetischen Reihen (Thl. I §. 194 und 195) können die rationalen Wurzeln einer Gleichung bestimmt werden, indem man jede Gleichung des nten Grades als Ausdruck für das allgemeine Glied einer Reihe nten Ranges ansehen kann. Substituirt man deshalb für x der Reihe nach 0, 1, 2, 3, ... und berechnet die entsprechenden Werthe des Polynoms f(x), so bilden diese eine dem Gradexponenten der Gleichung entsprechende höhere Reihe. Entwickelt man somit diese Reihe, so liefert der Stellenzeiger eines jeden Gliedes, das Null ist, zugleich eine Wurzel der gegebenen Gleichung. Entsprechen der Gleichung negative rationale Wurzeln, so ist die Entwickelung nach dieser Seite hin ebenfalls vorzunehmen.

Ein Beispiel wird das Verfahren klar machen.

Es sei $f(x) = x^3 + 2x^2 - 25x - 50 = 0$ die gegebene Gleichung.

Setzt man hierin $x = \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$
so resultirt: $f(x) = -50 \; -72 \; -84 \; -80$
und wenn man die Glieder der entsprechenden Reihe 3ten Ranges bildet, so folgt:

−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
0	18	16	0	−24	−50	−72	−84	−80	−54	0

18 −2 −16 −24 −26 −22 −12 4 26 54

−20 −14 −8 −2 4 10 16 22 28

6 6 6 6 6 6 6 6.

Die Wurzeln der Gleichung sind somit: − 5, − 2 und 5.

Man überzeugt sich leicht, daß in den meisten Fällen dieses Verfahren viel weitläufiger ist, als das vorhin gelehrte.

§. 121. Aufgaben zur Uebung.

Die rationalen Wurzeln in nachstehenden Gleichungen zu bestimmen:

1) $x^3 - 6x^2 - 16x + 96 = 0;$
2) $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0;$
3) $x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 8x - 160 = 0;$
4) $x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 88x + 96 = 0;$
5) $x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 630x^2 + 9x + 4455 = 0;$
6) $x^6 - 16x^5 + 34x^4 + 80x^3 - 191x^2 - 64x + 156 = 0;$
7) $x^5 - 2x^4 - 72x^3 + 392x^2 - 784x + 960 = 0;$
8) $x^3 - \frac{7}{12}x^2 - \frac{11}{24}x + \frac{1}{4} = 0;$
9) $x^4 - \frac{52}{15}x^3 + \frac{133}{60}x^2 + \frac{23}{30}x - \frac{2}{3} = 0;$
10) $x^4 - \frac{19}{12}x^3 + 5x^2 + \frac{17}{6}x - 1 = 0.$

b) Bestimmung der irrationalen Wurzeln.

§. 122. Erklärung.

Um die in einer Gleichung etwa vorkommenden irrationalen Wurzeln näherungsweise zu ermitteln, sucht man zunächst jede derselben zwischen zwei Zahlen einzuschließen, welche höchstens um die Einheit von einander verschieden sind. Dies zu bewerkstelligen, bestimme man zuerst nach §. 105 die Grenzen g und $-g_1$ der Wurzeln und führe nun für x der Reihe nach $0, 1, 2, 3, \ldots. g, -1, -2, -3, \ldots. -g_1$ in das Gleichungspolynom ein, so liegt nach §. 99 zwischen je zwei dieser Zahlen, deren Substitutionsresultate entgegengesetzte Zeichen haben, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung. Da aber nicht allein zwischen zwei solcher Zahlen überhaupt eine ungerade Anzahl von Wurzeln liegen, sondern auch nach §. 99 Zus. 1 zwischen je zwei Zahlen, welche für x in das Polynom gesetzt, Resultate von gleichen Zeichen liefern, eine gerade Anzahl von Wurzeln enthalten sein kann*), so werden wir uns vor Allem die Aufgabe zu stellen haben, die irrationalen Wurzeln, selbst wenn zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden ganzen Zahlen mehre solcher liegen sollten, von einander zu trennen und zwischen engere Grenzen einzuschließen. Bevor wir zur Behandlung der von Sturm für diese Aufgabe gegebenen Lösung schreiten können, ist es nothwendig den nachstehenden Satz zu beweisen.

§. 123. Lehrsatz.

Verfährt man unter der Voraussetzung, daß die Gleichung $f(x) = 0$ keine gleichen Wurzeln hat, mit dem Gleichungspolynom $f(x)$ und der daraus abgeleiteten Funktion $f_1(x)$ analog wie beim Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Theilers und bezeichnen R_1, R_2, R_3, ... der Reihe nach die hierbei bleiben-

*) Es wird natürlich vorausgesetzt, daß die der Gleichung etwa entsprechenden rationalen, oder gleichen Wurzeln nach Früherem bereits ausgeschieden sind.

den Reste mit entgegengesetzten Zeichen genommen, so können nie zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Functionen der Reihe

$$f(x),\ f_1(x),\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ \ldots.$$

für einerlei Werth von x Null werden und wird eine dieser Functionen für einen besonderen Werth von x Null, so haben die beiden benachbarten Functionen entgegengesetzte Zeichen.

Beweis.

Da nach der Voraussetzung $f(x) = 0$ keine gleichen Wurzeln hat, so haben $f(x)$ und $f_1(x)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler (§. 106) und es wird demnach zuletzt ein Rest bleiben, welcher kein x mehr enthält, also irgend eine bestimmte Zahl ausdrückt. Bezeichnen wir diese durch a und die den Divisoren

$$f_1(x),\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4,\ R_5,\ a$$

der Reihe nach entsprechenden Quotienten durch

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4,\ Q_5,\ Q_6,\ Q_7,$$

wornach also angenommen wird, daß $R_6 = a$ sei, so erhalten wir folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= Q_1\ f_1(x) - R_1 \\ f_1(x) &= Q_2\ R_1 - R_2 \\ R_1 &= Q_3\ R_2 - R_3 \\ R_2 &= Q_4\ R_3 - R_4 \\ R_3 &= Q_5\ R_4 - R_5 \\ R_4 &= Q_6\ R_5 - a \\ R_5 &= Q_7\ a. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich aber, daß niemals zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Functionen, wie z. B. R_2 und R_3 für denselben Werth von x Null werden können. Denn nehmen wir an, es wäre z. B. für $x = \alpha$ sowohl R_2 als R_3 Null, so würde aus der vierten der vorstehenden Gleichungen folgen:

$$R_4 = 0$$

und hiernach aus der fünften:

$$R_5 = 0$$

und schließlich aus der sechsten:

$$a = 0$$

was unmöglich ist, da die Gleichung $f(x) = 0$ keine gleichen Wurzeln hat, also a eine ganz bestimmte Zahl bedeutet.

Analog gilt das Gesagte für $f(x)$ und $f_1(x)$. Ist nun aber nur eine der Functionen $f(x)$, $f_1(x)$, R_1, R_2, ... z. B.

$$R_2 = 0,$$

so resultirt aus der dritten der obigen Gleichungen:

$$R_1 = -R_3,$$

woraus hervorgeht, daß in diesem Falle R_1 und R_3 entgegengesetzte Zeichen haben.

§. 124. Satz von Sturm.

Bezeichnet α eine der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ unter der Voraussetzung, daß diese nur ungleiche Wurzeln hat, δ eine unendlich klein werdende Größe, so haben nach §. 99 Zus. 2 $f(\alpha - \delta)$ und $f(\alpha + \delta)$ entgegengesetzte Zeichen und da $f_1(x)$ für $x = \alpha$ nicht Null werden kann*), aber $f_1(\alpha - \delta)$ und $f_1(\alpha + \delta)$ dem $f_1(\alpha)$ so nahe gebracht werden können als man will, wenn man nur δ klein genug annimmt, so müssen

$$f_1(\alpha - \delta),\ f_1(\alpha),\ f_1(\alpha + \delta)$$

einerlei Zeichen haben, da $f_1(x)$ stetig und $f_1(\alpha)$ nicht Null ist.

Nun ist aber nach §. 86 (6):

$$f(\alpha - \delta) = f(\alpha) - \delta f_1(\alpha) + \delta^2 f_2(\alpha) - \ldots.$$
$$f(\alpha + \delta) = f(\alpha) + \delta f_1(\alpha) + \delta^2 f_2(\alpha) + \ldots.$$

oder da

$$f(\alpha) = 0$$

ist, auch

$$f(\alpha - \delta) = - \delta f_1(\alpha) + \delta^2 f_2(\alpha) - \ldots.$$
$$f(\alpha + \delta) = \delta f_1(\alpha) + \delta^2 f_2(\alpha) + \ldots.$$

Nach §. 90 kann man aber δ stets so klein wählen, daß die Zeichen von $f(\alpha - \delta)$ und $f(\alpha + \delta)$ mit den Zeichen der beiden Anfangsglieder $-\delta f_1(\alpha)$ und $\delta f_1(\alpha)$ übereinstimmen und da δ positiv ist, so hat $f(\alpha - \delta)$ mit $f_1(\alpha)$, also auch mit $f_1(\alpha - \delta)$ entgegengesetzte, dagegen $f(\alpha + \delta)$ mit $f_1(\alpha)$ und mit $f_1(\alpha + \delta)$ einerlei Zeichen.

Setzt man daher in den Functionen

$$f(x),\ f_1(x),\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ \ldots.$$

für x der Reihe nach alle innerhalb des Intervalles $\alpha - \delta$ bis

*) Denn sonst würden die zwei unmittelbar aufeinander folgenden Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ für $x = \alpha$ verschwinden, was gegen den Satz §. 123 wäre.

$\alpha + \delta$ auf einander folgenden Werthe und notirt jedesmal nur die Zeichen der Glieder, so werden $f(x)$ und $f_1(x)$ für $x = (\alpha - \delta)$ einen Zeichenwechsel, dagegen für $x = (\alpha + \delta)$ eine Zeichenfolge abgeben und wenn keine der Functionen R_1, R_2, R_3, ... für $x = \alpha$ Null wird, so behalten dieselben als stetige Functionen von x ihre Zeichen unverändert bei. Es geht somit in diesem Falle in der Reihe der obigen Functionen ein und nur ein Zeichenwechsel verloren, wenn x successive von $\alpha - \delta$ in $\alpha + \delta$ übergeht, also eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ überschreitet.

Nehmen wir nun an, es werde eine der Functionen R_1, R_2, R_3, ... z. B. R_3 für $x = \alpha$ Null, so sind nach Vorhergehendem R_2 und R_4 nicht Null und haben entgegengesetzte Zeichen.

Als stetige Functionen behalten diese bei hinreichend kleinem δ für $x = \alpha - \delta$ und $x = \alpha + \delta$ dieselben Zeichen bei wie für $x = \alpha$, während R_3 für $x = \alpha - \delta$ und $x = \alpha + \delta$ einerlei oder verschiedene Zeichen annehmen kann.

Wir haben somit folgende vier Zeichenstellungen

a) wenn R_2 positiv und R_4 negativ:

	R_2	R_3	R_4	R_2	R_3	R_4	R_2	R_3	R_4	R_2	R_3	R_4
für $x = \alpha - \delta$	+	+	−	+	−	−	+	+	−	+	−	−
„ $x = \alpha$	+	0	−	+	0	−	+	0	−	+	0	−
„ $x = \alpha + \delta$	+	+	−	+	−	−	+	−	−	+	+	−

b) wenn R_2 negativ und R_4 positiv:

	R_2	R_3	R_4	R_2	R_3	R_4	R_2	R_3	R_4	R_2	R_3	R_4
für $x = \alpha - \delta$	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+
„ $x = \alpha$	−	0	+	−	0	+	−	0	+	−	0	+
„ $x = \alpha + \delta$	−	+	+	−	−	+	−	−	+	−	+	+

Die Vergleichung sämmtlicher für $x = \alpha - \delta$ und $x = \alpha + \delta$ erhaltenen Zeichenreihen läßt uns sofort erkennen, daß stets die Anzahl der Zeichenwechsel dieselbe geblieben ist. Zu demselben Resultate gelangt man natürlich, wenn irgend eine andere der Functionen $f_1(x)$, R_1, R_2, R_3, ... Null gesetzt worden wäre und wir können darum allgemein behaupten, daß wenn eine der Functionen $f_1(x)$, R_1, R_2, R_3, ... ein oder mehrmals Null wird, während x von a durch α in b übergeht, in den betreffen-

den Zeichenstellungen weder ein Zeichenwechsel gewonnen noch verloren wird.

Dies in Verbindung mit dem Obigen führt zu folgendem Schlusse:

Ist α eine zwischen a und b liegende Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ und man läßt x von a bis b sich stetig ändern, und bestimmt jedesmal die entsprechende Zeichenstellung der Functionen $f(x)$, $f_1(x)$, R_1, R_2, ... so geht bei dem Durchgange des x durch α ein Zeichenwechsel verloren d. h. für einen unmittelbar auf α folgenden Werth von x erhält man in der Zeichenreihe einem Zeichenwechsel weniger als für $x = a$.

Bezeichnet ferner $\beta > \alpha$ eine zweite zwischen α und b liegende Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, und man verfährt analog wie vorhin, so geht bei dem Durchgange des x durch β wiederum ein Zeichenwechsel verloren u. s. f. Für $x = b$ werden endlich genau so viele Zeichenwechsel verschwunden sein, als reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen a und b liegen, wodurch uns also ein Mittel an die Hand gegeben ist, sofort anzugeben, wie viele reelle Wurzeln einer Gleichung $f(x) = 0$ innerhalb gegebener Grenzen liegen.

Anmerkung. Dieser wichtige Satz wurde im Jahre 1829 von Sturm bekannt gemacht und wird nach ihm der Sturm'sche Satz genannt.

Zusätze.

1) Wird eine der Functionen

$$f_1(x),\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ \ldots.$$

Null für $x = a$ oder $x = b$, so kann man dieselbe ganz außer Acht lassen.

Ist z. B. $R_4 = 0$, so haben R_3 und R_5 entgegengesetzte Zeichen und es sind nun verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem R_3 positiv oder negativ ist und je nachdem man $R_4 = +0$ oder $R_4 = -0$ setzt.

Bezüglich der Zeichenreihen erhalten wir diesem entsprechend:

R_3	R_4	R_5		R_3	R_4	R_5
+	+0	−		−	+0	+
+	−0	−		−	−0	+

also in allen Fällen einen Wechsel.

Läßt man aber R_4 ganz außer Acht, so findet ebenfalls

durchweg nur ein Zeichenwechsel statt und es kann also in der That R_4 entweder + 0, — 0 gesetzt oder ganz weggelassen werden.

2) Ist a eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, also f(a) Null und man läßt f(x) ganz außer Acht, so besteht zwischen f(a) und $f_1(a)$ kein Zeichenwechsel und da $f(a + \delta)$ und $f_1(a + \delta)$ einerlei Zeichen haben, so fällt auch hier der Zeichenwechsel weg. Läßt man daher in der ersten Zeichenreihe für $x = a$ das erste Glied f(a) ganz außer Acht, so beschränkt sich die Untersuchung auf die Bestimmung der Anzahl der noch zwischen $(a + \delta)$ und b liegenden reellen Wurzeln. Ist diese nach obigem Satze (mit Weglassung von f(a)) ermittelt, so ist darunter die Wurzel a natürlich nicht mit inbegriffen.

3) Ist b eine Wurzel, also $f(b) = 0$ und man läßt bei der Zeichenstellung das erste Glied f(b) unberücksichtigt, so besteht wiederum zwischen f(b) und $f_1(b)$ kein Zeichenwechsel. Da ferner $f(b + \delta)$ und $f_1(b + \delta)$ einerlei Zeichen haben, so entspricht auch $f(b + \delta)$ und $f_1(b + \delta)$ kein Zeichenwechsel und die Aufgabe läuft darauf hinaus, zu bestimmen wie viele reelle Wurzeln zwischen a und $b + \delta$ liegen, die Wurzel b hierbei mitgerechnet.

4) Ist $f(a) = 0$ und $f(b) = 0$ und man läßt in den zwei entsprechenden Zeichenreihen die ersten Glieder unberücksichtigt, so ergibt sich das Resultat leicht aus der Verbindung der beiden vorhergehenden Fälle. Die Wurzel a wird nicht mit gerechnet, wohl aber b.

5) Es seien $\alpha, \beta, \ldots$ Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ innerhalb $x = a$ bis $x = b$. Läßt man nun x von a bis b successive wachsen, so haben für ein hinreichend kleines δ die Functionen $f(\alpha - \delta)$ und $f_1(\alpha - \delta)$ verschiedene, dagegen $f(\alpha + \delta)$ und $f_1(\alpha + \delta)$ einerlei Zeichen, so daß sich also der vor dem Durchgange durch die Wurzel zwischen f(x) und $f_1(x)$ bestehende Zeichenwechsel nach dem Durchgange in eine Zeichenfolge verwandelt. Da aber wieder $f(\beta - \delta)$ und $f_1(\beta - \delta)$ verschiedene Zeichen haben, so muß sich jene Zeichenfolge vor dem Durchgange durch β wieder in einen Zeichenwechsel verwandeln u. s. w. Allgemein wird also $f_1(x)$ sein Zeichen stets ändern, wenn x von einer Wurzel zur nächstfolgenden fortschreitet.

6) Behält eine der Functionen

$$f(x),\ f_1(x),\ R_1,\ R_2,\ \ldots.\ R_s,\ R_{s+1},\ \ldots.$$

etwa R_s dasselbe Zeichen bei, während x von a bis b wächst, so kann man die Reihe der Functionen mit R_s abschließen und die Untersuchung bloß auf die Functionen

$$f(x),\ f_1(x),\ R_1,\ R_2,\ \ldots\ R_s$$

beschränken.

Denn die Reihe

$$R_s,\ R_{s+1},\ R_{s+2},\ \ldots$$

hat für $x = a$ und $x = b$ dieselbe Anzahl von Zeichenwechseln, indem das erste Glied sein Zeichen nicht ändert und, wie früher gezeigt wurde, durch die Zeichenänderung der folgenden Glieder weder ein Zeichenwechsel verloren geht, noch gewonnen wird.

7) Um zunächst zu untersuchen wie viele reelle Wurzeln eine Gleichung $f(x) = 0$ habe, setze man der Reihe nach $x = -\infty$, 0 und $+\infty$ und bestimme dafür die drei entsprechenden Zeichenreihen. Haben diese bezüglich m, n, p Zeichenwechsel, so entsprechen der Gleichung $m - p$ reelle Wurzeln, von welchen $m - n$ negativ und $n - p$ positiv sind.

8) Da wir voraussetzen, daß die zu untersuchende Gleichung keine gleichen Wurzeln enthält, so ist der letzte Rest bekanntlich von x unabhängig und man hat darum nicht dessen Werth, sondern nur dessen Zeichen zu bestimmen.

Beispiele.

1) Um zu ermitteln, innerhalb welcher Grenzen die reellen Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = x^3 - 12x - 2 = 0$$

liegen, bilden wir zunächst

$$f_1(x) = 3x^2 - 12$$

und verfahren nun, um R_1 und R_2 zu finden, wie folgt:

$$(x^3 - 12x - 2) : (3x^2 - 12)$$

$$(x^3 - 12x - 2) : (x^2 - 4) = x$$

$$\underline{x^3 - 4x}$$

$$-8x - 2 = -2\,(4x + 1), \qquad R_1 = 4x + 1$$

$$(x^2 - 4) : (4x + 1)$$

$$(4x^2 - 16) : (4x + 1) = x - 1$$

$$\underline{4x^2 + x}$$

$$-x - 16$$

$$-4x - 64$$

$$\underline{-4x - 1}$$

$$-63 \qquad R_2 = 63.$$

Man erhält daher:

	$f(x)$	$f_1(x)$	R_1	R_2	Zeichenwechsel
für $x = -\infty$:	$-$	$+$	$-$	$+$	3
„ $x = 0$:	$-$	$-$	$+$	$+$	1
„ $x = +\infty$:	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Da somit von $x = -\infty$ bis $x = 0$ zwei und von $x = 0$ bis $x = +\infty$ noch weiter ein Zeichenwechsel verloren geht, so entsprechen der Gleichung im Ganzen drei reelle Wurzeln, nämlich zwei negative und eine positive.

Nun folgt ferner

	$f(x)$	$f_1(x)$	R_1	R_2	Zeichenwechsel,
für $x = -1$:	$+$	$-$	$-$	$+$	2
„ $x = -2$:	$+$	0	$-$	$+$	2
„ $x = -3$:	$+$	$+$	$-$	$+$	2
„ $x = -4$:	$-$	$+$	$-$	$+$	3

und die eine der negativen Wurzeln liegt daher zwischen 0 und -1, die andere zwischen -3 und -4.

Da weiter

	$f(x)$	$f_1(x)$	R_1	R_2	Zeichenwechsel
für $x = 1$:	$-$	$-$	$+$	$+$	1
„ $x = 2$:	$-$	0	$+$	$+$	1
„ $x = 3$:	$-$	$+$	$+$	$+$	1
„ $x = 4$:	$+$	$+$	$+$	$+$	0

so liegt die positive Wurzel zwischen 3 und 4.

2). Ist $f(x) = x^3 + 12x - 4 = 0$

die gegebene Gleichung, so hat man:

$$f_1(x) = 3x^2 + 12$$

$(x^3 + 12x - 4) : (3x^2 + 12)$

$(x^3 + 12x - 4) : (x^2 + 4) = x$

$x^3 + 4x$

$8x - 4 = 4(2x - 1) \qquad R_1 = -2x + 1$

$(x^2 + 4) : (-2x + 1)$

$(2x^2 + 8) : (-2x + 1) = -x - 1$

$2x^2 - x$

$x + 8$

$2x + 16$

$2x - 1$

$17 \qquad R_2 = -17.$

Daher

	$f(x)$	$f_1(x)$	R_1	R_2	Zeichenwechsel
für $x = -\infty$:	$-$	$+$	$+$	$-$	2
„ $x = 0$:	$-$	$+$	$+$	$-$	2
„ $x = +\infty$:	$+$	$+$	$-$	$-$	1

Der Gleichung entspricht somit nur eine reelle positive Wurzel.

Da man ferner erhält

	$f(x)$	$f_1(x)$	R_1	R_2	Zeichenwechsel
für $x = 1$:	$+$	$+$	$-$	$-$	1

so liegt diese Wurzel zwischen 0 und 1.

3) Es sei $f(x) = x^4 - x - 6 = 0$

die zu untersuchende Gleichung.

Man erhält:

$$f_1(x) = 4x^3 - 1$$

$$(x^4 - x - 6) : (4x^3 - 1)$$
$$(4x^4 - 4x - 24) : (4x^3 - 1) = x$$
$$\underline{4x^4 - x}$$
$$- 3x - 24 = - 3(x + 8) \qquad R_1 = x + 8$$
$$(4x^3 - 1) : (x + 8) = 4x^2 - 32x + 256$$
$$\underline{4x^3 + 32x^2}$$
$$- 32x^2 - 1$$
$$\underline{- 32x^2 - 256x}$$
$$256x - 1$$
$$\underline{256x + 2048}$$
$$- 2049 \qquad R_2 = 2049$$

	f(x)	$f_1(x)$	R_1	R_2	Zeichenwechsel
für $x = - \infty$:	+	−	−	+	2
„ $x = 0$:	−	−	+	+	1
„ $x = + \infty$:	+	+	+	+	0

Die Gleichung hat somit nur 2 reelle Wurzeln, wovon die eine negativ, die andere positiv ist.

Da ferner folgt:

	f(x)	$f_1(x)$	R_1	R_2	Zeichenwechsel
für $x = - 1$:	−	−	+	+	1
„ $x = - 2$:	+	−	+	+	2
„ $x = 1$:	−	+	+	+	1
„ $x = 2$:	+	+	+	+	0

so liegt die negative Wurzel zwischen − 1 und − 2, die positive zwischen 1 und 2.

4) Für die Gleichung

$$f(x) = x^4 + x + 3 = 0$$

erhält man: $f_1(x) = 4x^3 + 1$

$$(x^4 + x + 3) : (4x^3 + 1)$$
$$(4x^4 + 4x + 12) : (4x^3 + 1) = x$$
$$\underline{4x^4 + x}$$
$$3x + 12 = 3(x + 4) \qquad R_1 = - x - 4$$
$$(4x^3 + 1) : (- x - 4) = - 4x^2 + 16x - 64$$
$$\underline{4x^3 + 16x^2}$$
$$- 16x^2 + 1$$
$$\underline{- 16x^2 - 64x}$$
$$64x + 1$$
$$\underline{64x + 256}$$
$$- 255 \qquad R_2 = 255$$

	f(x)	$f_1(x)$	R_1	R_2	Zeichenwechsel
für $x = -\infty$:	+	−	+	+	2
„ $x = 0$:	+	+	−	+	2
„ $x = +\infty$:	+	+	−	+	2

Der vorgelegten Gleichung entsprechen hiernach keine reellen Wurzeln.

Anmerkung. Findet man, daß mehre Wurzeln zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgende ganze Zahlen fallen, z. B. zwischen 3 und 4, so trenne man solche dadurch, daß man ganz analog der Reihe nach für $x = 3{,}1;\ 3{,}2;\ 3{,}3\ \ldots$ setzt und die betreffenden Zeichenreihen bildet. Stimmen die Wurzeln auf eine oder mehre Decimalstellen mit einander überein, so trennt man dieselben nach einem später (§. 130) zu lehrenden Verfahren.

§. 125. Aufgaben zur Uebung.

Man soll für jede der nachstehenden Gleichungen die Anzahl der reellen Wurzeln bestimmen und angeben, zwischen welchen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen dieselben liegen.

1) $x^3 - 12x - 1 = 0$;
2) $x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$;
3) $x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 2x - 3 = 0$;
4) $x^4 - 8x^3 - x - 1 = 0$;
5) $x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 5x - 3 = 0$;
6) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$;
7) $x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$.

§. 126. Näherungsmethode von Newton.

Nachdem wir im Vorstehenden ein Mittel kennen gelernt haben die irrationalen Wurzeln von einander abzusondern, so wollen wir uns nun mit den verschiedenen Methoden beschäftigen, welche dazu dienen, solche Wurzeln annäherungsweise zu bestimmen und zu diesem Ende zunächst die Newton'sche Näherungsmethode erläutern.

Bezeichnet a einen nahe an der Wurzel x der Gleichung $f(x) = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0$ liegenden Werth und man setzt

$$x = a + \alpha$$

in die Gleichung, so kann man, wegen der Kleinheit von α, in dem Gleichungspolynom alle Glieder, welche α in einer höheren

Potenz als in der zweiten enthalten, ganz außer Acht lassen. Man bekommt dadurch:

$$a^n + na^{n-1}\alpha + A_1 a^{n-1} + (n-1) A_1 a^{n-2}\alpha + A_2 a^{n-2} + (n-2) A_2 a^{n-3}\alpha + \ldots + A_{n-1} a + A_{n-1}\alpha + A_n = 0$$

oder

$$a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \ldots + A_{n-1} a + A_n + \alpha[na^{n-1} + (n-1) A_1 a^{n-2} + (n-2) A_2 a^{n-3} + \ldots + A_{n-1}] = 0$$

oder $f(a) + \alpha\, f_1(a) = 0$*)

woraus folgt: $\alpha = -\frac{f(a)}{f_1(a)}$.

Man hat daher in

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f_1(a)}$$

einen der Wurzel noch näher kommenden Werth als a.

Verfährt man nun mit diesem Werthe a_1 analog wie vorhin mit a und setzt

$$x = a_1 + \alpha_1$$

in die ursprüngliche Gleichung, so erhält man:

$$f(a_1) + \alpha_1 f_1(a_1) = 0,$$

also $\alpha_1 = -\frac{f(a_1)}{f_1(a_1)}$

und somit: $a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f_1(a_1)}$

als einen noch näher an der Wurzel liegenden Werth.

In dieser Weise fährt man fort zu operiren, bis dem für x gewonnenen Werthe die gewünschte Genauigkeit entspricht.

Was die Berechnung der Werthe von $f(a)$, $f_1(a)$, $f(a_1)$, $f_1(a_1)$, ... anbelangt, so geschieht dieselbe am raschesten nach dem in §. 93 gelehrten Burdan'schen Divisionsverfahren; denn bekanntlich ist allgemein $f(z)$ nichts Anderes als der Rest, welcher bleibt, wenn man das Polynom $f(x)$ durch $(x - z)$ dividirt.

Beispiel.

Es sei $f(x) = x^3 + 12x - 10 = 0$
die aufzulösende Gleichung.

*) Hierbei ist vorausgesetzt, daß $f_1(a)$ nicht selbst sehr klein sei, was aber geschehen darf, indem angenommen wird, daß der Gleichung $f(x) = 0$ keine gleichen oder nahezu gleichen Wurzeln entsprechen.

Man findet zunächst:

$$f_1(x) = 3x^2 + 12$$
$$R_1 = -4x + 5$$
$$R_2 = -89$$

und hiernach die Zeichenreihen:

	f(x)	$f_1(x)$	R_1	R_2	Zeichenwechsel
für $x = -\infty$:	$-$	$+$	$+$	$-$	2
„ $x = 0$:	$-$	$+$	$+$	$-$	2
„ $x = +\infty$:	$+$	$+$	$-$	$-$	1

Der Gleichung entspricht somit nur eine reelle, positive Wurzel, welche, wie sich leicht durch Substitution ergibt, zwischen 0 und 1 liegt.

Da $f(0) = -10$, $f(1) = 3$, so liegt die Wurzel näher an 1 als an 0.

Nun folgt

für $x = 0,5 : f(x) = -3,875$
„ $x = 0,6 : f(x) = -2,584$
„ $x = 0,7 : f(x) = -1,257$
„ $x = 0,8 : f(x) = +0,112$

also liegt die zu suchende Wurzel zwischen 0,7 und 0,8.

Setzt man nun in obiger Entwickelung $a = 0,7$, also

$$x = 0,7 + \alpha,$$

bildet

$$f_1(x) = 3x^2 + 12$$

und bestimmt nach §. 93:

0,7

0	$0,7 \quad + 0 =$	$0,7$
12	$0,7 . 0,7 \quad + 12 =$	$12,49$
-10	$0,7 . 12,49 - 10 =$	$-1,257 = f(0,7)$

0,7

3	3	$= 3$
0	$0,7 . 3$	$= 2,1$
12	$0,7 . 2,1 + 12$	$= 13,47 = f_1(0,7)$

so folgt:

$$\alpha = -\frac{f(a)}{f_1(a)} = \frac{1,257}{13,47} = 0,093.$$

Es ist daher

$$x = 0,7 + 0,093 = 0,793$$

ein dem wahren Werthe näher liegender Werth.

Bildet man nun $f(0,79)$ und $f_1(0,79)$, wie folgt:

0,79

0	$0,79 \quad + 0 =$	$0,79$
12	$0,79 . 0,79 \quad + 12 =$	$11,6241$
-10	$0,79 . 12,6241 - 10 =$	$-0,026961 = f(0,79)$

$$\begin{array}{llll} \underbrace{0{,}79} & & & \\ 3 & 3 & = & 3 \\ 0 & 0{,}79 \,.\, 3 & = & 2{,}37 \\ 12 & 0{,}79 \,.\, 2{,}37 + 12 & = & 13{,}8723 = f_1(0{,}79) \end{array}$$

so erhält man:

$$\alpha_1 = -\frac{f(a_1)}{f_1(a_1)} = \frac{0{,}026961}{13{,}8723} = 0{,}0019 \ldots.$$

Ein weiterer Näherungswerth ist daher:

$$x = 0{,}79 + 0{,}0019 = 0{,}7919.$$

Führt man diesen Werth in die vorgelegte Gleichung statt x ein, so resultirt $f(x) = -0{,}00049$, woraus hervorgeht, daß 0,7919 dem wahren Werthe schon sehr nahe liegt.

Setzt man nun $x = 0{,}7919 + \alpha_2$ und entwickelt abermals α_2, so erhält man ein noch genaueres Resultat u. s. w. Der wahre Werth ist 0,791942 ....

§. 127. Näherungsmethode von Lagrange.

Zeigt die Untersuchung, daß eine reelle und, wie wir zunächst voraussetzen wollen, eine positive Wurzel der Gleichung

$$f(x) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

zwischen a und a + 1 liegt, so setze man in derselben

$$x = a + \frac{1}{y_1}$$

wo natürlich $y_1 > 1$ und positiv ist, und entwickle die betreffende Gleichung in y_1, nämlich:

$$f(y_1) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Da nach unserer Voraussetzung zwischen a und a + 1 nur eine positive Wurzel liegt, so entspricht der Gleichung (2) auch nur eine positive Wurzel y_1, welche größer als 1 ist, weil andernfalls auch dem Ausdrucke $a + \frac{1}{y_1}$ mehre Werthe zukämen, was gegen die Voraussetzung wäre, daß zwischen a und a + 1 nur eine Wurzel liegt.

Findet man nun daß die positive Wurzel der Gleichung (2) zwischen a_1 und $a_1 + 1$ liegt und man setzt in derselben

$$y_1 = a_1 + \frac{1}{y_2}$$

wo natürlich $y_2 > 1$ ist und entwickelt die Gleichung

$$f(y_2) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

so enthält diese wiederum nur eine positive Wurzel $y_2 > 1$. Angenommen diese liege zwischen a_2 und $a_2 + 1$, so setze in der Gleichung (3)

$$y_2 = a_2 + \frac{1}{y_3},$$

wo $y_3 > 1$, entwickle die Gleichung

$$f(y_3) = 0,$$

bestimme die Grenzen a_3 und $a_3 + 1$ der positiven Wurzel y_3 und setze

$$y_3 = a_3 + \frac{1}{y_4},$$

wo $y_4 > 1$.

Fährt man in dieser Weise fort zu operiren, so erhält man schließlich den Näherungswerth in Form eines Kettenbruches, dessen Werth leicht nach Thl. I §. 86 bestimmt werden kann.

Es ist nämlich nach obigem Entwickelungsgange:

$$x = a + \frac{1}{y_1} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{y_2}}$$

$$= a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{y_3}}} \qquad = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}}$$

Je mehr man hierbei Partialnenner entwickelt, um so genauer erhält man natürlich den Werth von x.

Zeigt die Untersuchung, daß der Gleichung (1) auch negative Wurzeln entsprechen, so setze man, um diese zu ermitteln, zuerst $-x$ statt x in die vorgelegte Gleichung und suche nun die positiven Wurzeln der resultirenden Gleichung

$$f(-x) = 0,$$

so liefern diese, negativ genommen, die gewünschten negativen Wurzeln der Gleichung (1).

Anmerkung. Wir haben oben voraus gesetzt, daß zwischen a und $a + 1$ nur eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liege. Fallen mehre ihrer Wurzeln zwischen diese Grenzen, so sind dieselben zunächst zu trennen. Dasselbe hat man alsdann auch bei den Gleichungen in y zu beobachten, da jeder derselben nun auch mehre innerhalb der entsprechenden Grenzen liegende Wurzeln entsprechen.



Beispiele.

1) Es sei $f(x) = x^3 - 3x - 4 = 0 \ldots (1)$
die vorgelegte Gleichung.

Da
$$f_1(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$
$$R_1 = x + 2$$
$$R_2 = -3$$
gefunden wird, so erhält man als Zeichenreihen

für $x = -\infty : - + - -$

„ $x = \quad 0 : - - + -$

„ $x = +\infty : + + + -$

und der Gleichung entspricht somit eine reelle positive Wurzel, welche, wie man leicht findet, zwischen 2 und 3 liegt.

Setzt man daher $x = 2 + \frac{1}{y_1}$
so geht die vorgelegte Gleichung (1) über in:
$$y_1^3 - \frac{9}{2}y_1^2 - 3y_1 - \frac{1}{2} = 0 \ldots\ldots (2)$$
und man findet leicht, daß y_1 zwischen 5 und 6 liegt.

Setzt man nun in Gleichung (2)
$$y_1 = 5 + \frac{1}{y_2}$$
so geht dieselbe über in:
$$y_2^3 - 9y_2^2 - \frac{7}{2}y_2 - \frac{1}{3} = 0 \ldots\ldots (3)$$
und es liegt y_2 zwischen 9 und 10.

Für
$$y_2 = 9 + \frac{1}{y_3}$$
folgt ferner aus (3):
$$y_3^3 - \frac{465}{191}y_3^2 - \frac{108}{191}y_3 - \frac{6}{191} = 0$$
und da hiernach y_3 zwischen 2 und 3 liegt, so hat man, wenn die Entwickelung damit abgebrochen wird,
$$x = 2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2}}} = 2\,\frac{19}{97} = 2{,}1958$$

Anmerkung. Der genauere Werth ist $x = 2{,}195823$.

2) Es sei
$$x^3 - 12x^2 + 14x - 4 = 0$$
die zu lösende Gleichung.

Man überzeugt sich leicht, daß dieser Gleichung 3 reelle Wurzeln entsprechen, von welchen zwei zwischen 0 und 1 liegen und eine zwischen 10 und 11. Eine weitere Untersuchung lehrt, daß von

jenen beiden Wurzeln die eine zwischen 0,4 und 0,5, die andere zwischen 0,8 und 0,9 fällt.

Setzt man nun $x = 0 + \frac{1}{y_1} = \frac{1}{y_1}$

in die gegebene Gleichung, so resultirt:

$$4y_1^3 - 14y_1^2 + 12y_1 - 1 = 0.$$

Dieser Gleichung entsprechen, wie dieses sein muß, zwei positive Wurzeln, von welchen die eine zwischen 1 und 2, die andere zwischen 2 und 3 liegt. Soll nun zunächst die kleinere der beiden zwischen 0 und 1 fallenden Wurzeln der vorgelegten Gleichung gesucht werden, so hat man in der letzten Gleichung

$$y_1 = 2 + \frac{1}{y_2}$$

zu setzen und im Uebrigen alsdann wie vorhin zu verfahren.

Man findet:

$$y_2^3 - 4y_2^2 - 10y_2 + 4 = 0; \qquad y_2 = 5 + \frac{1}{y_3}$$

$$29y_3^3 - 25y_3^2 - 11y_3 - 1 = 0; \qquad y_3 = 1 + \frac{1}{y_4}$$

$$8y_4^3 - 26y_4^2 - 62y_4 - 29 = 0; \qquad y_4 = 4 + \frac{1}{y_5}$$

$$181y_5^3 - 114y_5^2 - 70y_5 - 8 = 0; \qquad y_5 = 1 + \frac{1}{y_6}$$

$$11y_6^3 - 245y_6^2 - 429y_6 - 181 = 0; \quad y_6 = 23 + \frac{1}{y_7}$$

Folglich ist

$$x_1 = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{23}}}}}} = \frac{834}{1811} = 0,46052 \ldots.$$

Zur Bestimmung der zweiten Wurzel x_2 hat man:

$$4y_1^3 - 14y_1^2 + 12y_1 - 1 = 0; \quad y_1 = 1 + \frac{1}{y_2}$$

$$y_2^3 - 4y_2^2 - 2y_2 + 4 = 0; \qquad y_2 = 4 + \frac{1}{y_3}$$

$$4y_3^3 - 14y_3^2 - 8y_3 - 1 = 0; \quad y_3 = 4 + \frac{1}{y_4}$$

$$y_4^3 - 72y_4^2 - 34y_4 - 4 = 0; \quad y_4 = 72 + \frac{1}{y_5}$$

$$2452y_5^3 - 5150y_5^2 - 144y_5 - 1 = 0; \qquad y_5 = 2 + \frac{1}{y_6}$$

$$1273y_6^3 - 8680y_6^2 - 9562y_6 - 2452 = 0; \; y_6 = 7 + \frac{1}{y_7}$$

Daher ist

$$x_2 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{72+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7}}}}}} = \frac{18539}{22902} = 0{,}809491 \; \ldots .$$

Für die zwischen 10 und 11 liegende Wurzel x_3 findet man:

$$x^3 - 12x^2 + 14x - 4 = 0; \; x = 10 + \frac{1}{y_1}$$

$$64y_1^3 - 74y_1^2 - 18y_1 - 1 = 0; \qquad y_1 = 1 + \frac{1}{y_2}$$

$$29y_2^3 - 26y_2^2 - 118y_2 - 64 = 0; \qquad y_2 = 2 + \frac{1}{y_3}$$

$$172y_3^3 - 126_3^2 - 148y_3 - 29 = 0; \qquad y_3 = 1 + \frac{1}{y_4}$$

$$131y_4^3 - 116y_4^2 - 890y_4 - 172 = 0; \qquad y_4 = 2 + \frac{1}{y_5}$$

$$368y_5^3 - 718y_5^2 - 670y_5 - 131 = 0; \qquad y_5 = 2 + \frac{1}{y_6}$$

$$1399y_6^3 - 874y_6^2 - 1490y_6 - 368 = 0; \; y_6 = 1 + \frac{1}{y_7}$$

$$1333y_7^3 - 959y_7^2 - 3323y_7 - 1399 = 0; \; y_7 = 2 + \frac{1}{y_8}$$

$$1217y_8^3 - 8837y_8^2 - 7039y_8 - 1333 = 0; \; y_8 = 8 + \frac{1}{y_9}$$

Es ist daher

$$x_3 = 10 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8}}}}}}}} = 10\frac{611}{837} = 10{,}729988 \ldots .$$

§. 128. Näherungsmethode von Horner.

Es sei

$$f(x) = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0 \quad (1)$$

die vorgelegte Gleichung und

$$x = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \frac{\alpha_3}{1000} + \ldots . \quad (2)$$

die einzige reelle und zwar positive zwischen

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} \text{ und } \alpha_0 + \frac{\alpha_1 + 1}{10} \quad \ldots . . (4)$$

liegende Wurzel derselben, so ist

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} \quad \ldots \ldots \ldots . (4)$$

ein dieser Wurzel genäherter und zwar kleinerer Werth. Bildet man nun eine Gleichung, deren Wurzeln um $\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}$ kleiner sind, als die der vorgelegten Gleichung, nach §. 110 also:

$$f(y) = y^n + y^{n-1}f_{n-1}\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}\right) + \ldots + yf_1\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}\right) + f\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}\right) = 0 \quad (5)$$

so entspricht dieser jedenfalls die Wurzel

$$\frac{\alpha_2}{100} + \frac{\alpha_3}{1000} + \frac{\alpha_4}{10000} + \ldots . . (6)$$

Da diese kleiner ist als $\frac{1}{10}$, so erhält man einen genäherten Werth $\frac{\alpha_2}{100}$ der Wurzel der Gleichung (5), wenn man darin die höheren Potenzen von y vernachlässigt, also

$$yf_1\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}\right) + f\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}\right) = 0$$

oder

$$y = \frac{\alpha_2}{100} = -\frac{f\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}\right)}{f_1\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}\right)} \quad \ldots . . (7)$$

setzt.

Man bekommt somit die erste auf α_1 folgende, von Null verschiedene Dezimalstelle, wenn man das letzte Glied der Gleichung (5) durch den Coeffieienten des vorletzten Gliedes dividirt und nur die erste von Null verschiedene Quotientenziffer bestimmt.

Bildet man nun in analoger Weise eine Gleichung, deren Wurzeln um $\frac{\alpha_2}{100}$ kleiner sind, als die der Gleichung (5), so hat die transformirte Gleichung offenbar die Wurzel

$$\frac{\alpha_3}{1000} + \frac{\alpha_4}{10000} + \dots .$$

welche jedenfalls kleiner ist als $\frac{1}{100}$. Durch Vernachlässigung der höheren Potenzen der Unbekannten erhält man alsdann eine Gleichung des ersten Grades, aus der sich wie vorhin der Schluß ergibt, daß die nächste auf α_2 folgende von Null verschiedene Dezimalstelle erhalten wird, wenn man wieder das letzte Glied der transformirten Gleichung durch den Coefficienten des vorletzten Gliedes dividirt.

Ganz analog bildet man nun wieder eine Gleichung, deren Wurzeln um $\frac{\alpha_3}{1000}$ kleiner sind, als die der vorigen u. s. f.

Man erhält durch dieses Verfahren der Reihe nach die einzelnen Dezimalstellen der zu suchenden Wurzel.

Anmerkungen. 1) Ereignet es sich, daß wegen der Vernachlässigung der Glieder eine Dezimalstelle zu groß oder zu klein ausfällt, so erkennt man solches sofort bei der Bestimmung der nächstfolgenden Dezimalstelle. Denn ist z. B. $\frac{\alpha_2}{100}$ zu klein, so findet man $\frac{\alpha_3}{1000} > 9$ und man hat alsdann α_2 um eine Einheit größer zu nehmen und α_3 auf's Neue zu bestimmen. Ist $\frac{\alpha_2}{100}$ zu groß, so ändert in der folgenden transformirten Gleichung das letzte Glied sein Zeichen. Denn alsdann liegt die Wurzel zwischen

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} \text{ und } \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100}$$

und es müssen somit

$$f\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}\right) \text{ und } f\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100}\right)$$

verschiedene Zeichen haben.

2) Dieses von Horner gelehrte Verfahren führt im Allgemeinen viel rascher zum Ziele als die beiden vorhergehenden Methoden.

Beispiel.

Sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 2x - 3 = 0 \dots (a)$$

zu ermitteln, so ergibt das bekannte Verfahren zunächst, daß der-

selben zwei reelle Wurzeln entsprechen, von welchen die eine zwischen 7 und 8, die andere zwischen — 1 und — 2 liegt.

Um nun zuerst die positive Wurzel zu berechnen, welche, wie man leicht findet, zwischen 7,2 und 7,3 fällt, setze man nach (4)

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} = 7{,}2$$

und bilde eine Gleichung deren Wurzeln um 7,2 kleiner sind als die der vorgelegten Gleichung (a).

Nach §. 110. Zus. hat man:

7,2	7,2	7,2	7,2	
— 6	1,2	8,4	15,6	22,8
— 9	— 0,36	60,12	172,44	
2	— 0,592	432,272		
— 3	— 7,2624			

und die erste transformirte Gleichung heißt daher:

$$y_1^4 + 22{,}8\, y_1^3 + 172{,}44\, y_1^2 + 432{,}272\, y_1 - 7{,}2624 = 0 \ldots (b)$$

Hieraus folgt nach (7):

$$y_1 = \frac{\alpha_2}{100} = -\frac{-7{,}2624}{432{,}272} = 0{,}01$$

und es ist somit

$$7{,}2 + 0{,}01 = 7{,}21$$

ein genäherter Werth der Wurzel der Gleichung (a).

Bildet man nun eine Gleichung, deren Wurzeln um 0,01 kleiner sind, als die der Gleichung (b), so hat man:

0,01	0,01	0,01	0,01	
22,8	22,81	22,82	22,83	22,84
172,44	172,6681	172,8963	173,1246	
432,272	433,998681	435,727644		
— 7,2624	— 2,92241319			

und hiernach die transformirte Gleichung:

$$y_2^4 + 22{,}84\, y_2^3 + 173{,}1246\, y_2^2 + 435{,}727644\, y_2 - 2{,}92241319 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c).$$

Es ist somit

$$y_2 = \frac{\alpha_3}{1000} = -\frac{-2{,}92241319}{435{,}727644} = 0{,}006;$$

also $$7{,}21 + 0{,}006 = 7{,}216$$

ein dritter genäherter Werth der zu suchenden Wurzel.

Entwickelt man nun eine Gleichung deren Wurzeln um 0,006 kleiner sind als die der Gleichung (c), so erhält man:

0,006	0,006	0,006	0,006	
22,84	22,846	22,852	22,858	22,864
173,1246	173,261676	173,398788	173,535936	
435,727644	436,767214056	437,807606784		
—2,92241319	—0,301809905664			

und somit als transformirte Gleichung:

$$y_3^4 + 22,864\, y_3^3 + 173,535936\, y_3^2 + 437,807606784\, y_3 - 0,301809905664 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d).$$

Es ist daher

$$y_3 = \frac{\alpha_4}{10000} = -\frac{-0,301809905664}{437,807606784} = 0,0006$$

und $\quad 7,216 + 0,0006 = 7,2166$

ein noch mehr genäherter Werth der Wurzel.

Vermindert man jetzt die Wurzeln der Gleichung (d) um 0,0006, so findet man

$$y_4^4 + 22,8664\, y_4^3 + 173,57709436\, y_4^2 + 438,015874601184\, y_4 - 0,0390628637178864 = 0$$

als entsprechende Gleichung und hieraus

$$y_4 = \frac{\alpha_4}{10000} = -\frac{-0,0390628637178864}{438,015874601184} = 0,00008.$$

Auf 5 Dezimalstellen genau ist demnach die Wurzel

$$x = 7,2166 + 0,00008 = 7,21668.$$

Um nun auch die zwischen -1 und -2 liegende Wurzel zu berechnen, verwandle man zuerst nach §. 98. die Gleichung (a) in eine andere mit entgegengesetzten Wurzeln. Man findet dafür:

$$x^4 + 6x^3 - 9x^2 - 2x - 3 = 0 \; . \; . \; . \; . \; (e)$$

Die Wurzel dieser Gleichung liegt, wie man sich leicht überzeugt, zwischen 1,5 und 1,6. Verwandelt man daher die Gleichung (e) in eine andere, deren Wurzeln um 1,5 kleiner sind, u. s. f., so erhält man nach dem oben angegebenen Rechnungsmechanismus:

1,5	1,5	1,5	1,5	
6	7,5	9	10,5	12
− 9	2,25	15,75	31,5	
− 2	1,375	25		
− 3	− 0,9375			

$$\frac{\alpha_2}{100} = \frac{0,9375}{25} = 0,03$$

0,03	0,03	0,03	0,03	
12	12,03	12,06	12,09	12,12
31,5	38,8609	32,2227	32,5854	
25	25,955827	26,922508		
− 0,9375	− 0,15882519			

$$\frac{\alpha_3}{1000} = \frac{0,15882519}{26,922508} = 0,005$$

0,005	0,005	0,005	0,005	
12,12	12,125	12,13	12,135	12,14
32,5854	32,646025	32,706675	32,76735	
26,922508	27,085738125	27,2492725		
− 0,15882519	−0,023396499375			

$$\frac{\alpha_4}{10000} = \frac{0,023396499375}{27,2492725} = 0,0008$$

die Wurzel der Gleichung (e) ist somit $= 1{,}5358 \ldots$, also die negative Wurzel der Gleichung (a) $= -1{,}5358$.

§. 129. Regula falsi.

Eine andere sehr praktische Methode zur Auffindung irrationaler Wurzeln ist die unter dem Namen Regula falsi bekannte. Um dieselbe zu entwickeln, seien α und β zwei, der Wurzel w der Gleichung

$$f(x) = 0$$

genäherte Werthe, so daß gesetzt werden kann:

$$w = \alpha + \delta_1 \text{ und auch } w = \beta + \delta_2$$

wo δ_1 und δ_2 sehr kleine Werthe bedeuten.

Nach §. 86. (6) hat man dann:

$$f(w - \delta_1) = f(w) - \delta_1 f_1(w) + \delta_1^2 f_2(w) - \ldots \pm \delta_1^n f_n(w)$$
$$f(w - \delta_2) = f(w) - \delta_2 f_1(w) + \delta_2^2 f_2(w) - \ldots \pm \delta_2^n f_n(w).$$

Berücksichtigt man nun, daß w eine Wurzel der Gleichung, also $f(w) = 0$ ist und daß δ_1 und δ_2 sehr klein angenommen wurden, man also alle höheren Potenzen dieser Größen außer Acht lassen kann, so gehen die vorstehenden Gleichungen über in:

$$f(w - \delta_1) = -\delta_1 f_1(w)$$

und

$$f(w - \delta_2) = -\delta_2 f_1(w).$$

Durch Division erhält man hieraus:

$$\frac{f(w - \delta_1)}{f(w - \delta_2)} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

oder auch

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = \frac{w - \alpha}{w - \beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

wodurch folgende Regel ausgedrückt wird:

Unter den gemachten Voraussetzungen verhalten sich die Fehler der Resultate wie die Fehler der Substitutionen.

Aus (1) findet man

$$w = \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{f(\alpha) - f(\beta)} = \alpha + \frac{(\beta - \alpha) f(\alpha)}{f(\alpha) - f(\beta)} \ldots\ldots (2)$$

als einen dem wahren Werthe w um so näher kommenden Werth, je kleiner die Substitutionsfehler $w - \alpha$ und $w - \beta$ sind. Bringt man den nach (2) gefundenen Näherungswerth, welchen wir durch w_1 bezeichnen wollen, mit dem genaueren der beiden Werthe α und β, also z. B. mit β, oder einem anderen der Wurzel noch

näher kommenden Werthe so in Verbindung, daß w_1 nun die Rolle von α übernimmt, so findet man nach (2) einen weiteren Werth w_2, welcher der wirklichen Wurzel noch näher liegt, als w_1. In dieser Weise kann man fortfahren Werthe von immer größerer Genauigkeit zu bestimmen.

Anmerkungen. 1) Obiger Satz (1), welcher für Gleichungen vom zweiten Grade an nur annähernd richtig ist, hat für solche des ersten Grades volle Giltigkeit, wie man sich durch Einführung der betreffenden Werthe aus der Gleichung

$$f(x) = ax + b = 0$$

in obige Gleichung (1) überzeugt, wenn man dabei berücksichtigt, daß $w = -\frac{b}{a}$ ist.

2) Die in Vorstehendem entwickelte Methode gewährt den Vortheil, daß sich mittelst derselben auch transcendente Gleichungen auflösen lassen, wie dies bei nachstehenden Beispielen gezeigt werden soll.

Beispiele.

1) Ist $f(x) = x^3 + 12x - 4 = 0$ die gegebene Gleichung, so findet man bald, daß derselben nur eine reelle, zwischen 0,3 und 0,4 liegende Wurzel entspricht. Setzt man darum in (2):

$$\alpha = 0{,}3;\ \beta = 0{,}4;\ f(\alpha) = -0{,}373;\ f(\beta) = 0{,}864;$$

so folgt:

$$w_1 = 0{,}3 + \frac{0{,}1 \,.\, 0{,}373}{0{,}373 + 0{,}864} = 0{,}33.$$

Substituirt man nun in (2):

$$\alpha = 0{,}3;\ \beta = 0{,}33;\ f(\alpha) = -0{,}373;\ f(\beta) = -0{,}004063,$$

so wird

$$w_2 = 0{,}33 + \frac{0{,}03 \,.\, 0{,}373}{0{,}373 - 0{,}004063} = 0{,}3303.$$

Führt man ferner

$$\alpha = 0{,}33;\ \beta = 0{,}3303;\ f(\alpha) = -0{,}004063;$$
$$f(\beta) = -0{,}0003671$$

in (2) ein, so resultirt:

$$w_3 = 0{,}33 + \frac{0{,}0003 \,.\, 0{,}004063}{0{,}004063 - 0{,}0003671} = 0{,}330329.$$

Anmerkung. Durch Einführung dieses Werthes w_3 in das gegebene Gleichungspolynom statt x findet man, daß 0,330329 der Wurzel schon sehr nahe liegt.

2) Eine Summe von 40000 Mark ist in der Weise zurückzuzahlen, daß 21 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres 1600 Mark und mit der letzten Zahlung am Ende des 21. Jahres noch außerdem 1228,48 Mark abgetragen werden. Wie viel Prozent wurden hierbei in Rechnung gebracht?

Auflösung.

Bezeichnet p die jährlichen Prozente und man setzt $\frac{p}{2} = q$, so hat man:

$$40000 = \frac{1600\,(1{,}0q^{42} - 1)}{(1{,}0q - 1)\,1{,}0q^{42}} + \frac{1228{,}48}{1{,}0q^{42}}$$

woraus folgt, wenn man der Kürze halber $1{,}0q = x$ setzt,

$$x^{43} - 1{,}04x^{42} - 0{,}030712x + 0{,}070712 = 0.$$

Man findet nun leicht, daß der hier zu gebrauchende Werth von x zwischen 1,02 und 1,03 zu nehmen ist. Für $x = 1{,}02$ folgt $f(x) = -0{,}163981$ und für $x = 1{,}03$ wird $f(x) = +0{,}111794$.

Setzt man daher in (2):

$\alpha = 1{,}02$; $\beta = 1{,}03$; $f(\alpha) = -0{,}163981$; $f(\beta) = 0{,}111794$; so folgt:

$$w_1 = 1{,}02 + \frac{0{,}01\,.\,0{,}163981}{0{,}163981 + 0{,}111794} = 1{,}0259.$$

Substituirt man nun in (2):

$\alpha = 1{,}0259$; $\beta = 1{,}03$; $f(\alpha) = -0{,}00206$; $f(\beta) = 0{,}111794$; so erhält man:

$$w_2 = 1{,}0259 - \frac{0{,}0041\,.\,0{,}00206}{0{,}00206 + 0{,}111794} = 1{,}0266.$$

Für $\alpha = 1{,}0266$; $f(\alpha) = -0{,}001174$; $\beta = 1{,}027$; $f(\beta) = -0{,}00064$ findet man ferner:

$$w_3 = 1{,}0266 + \frac{0{,}0004\,.\,0{,}001174}{0{,}001174 - 0{,}00064} = 1{,}02747.$$

Wie man sich durch Einführung dieses Werthes statt x in die Gleichung leicht überzeugt, liegt derselbe dem wirklichen Werthe schon sehr nahe und man kann darum setzen:

$$1{,}0q = 1{,}02747$$

also $q = 2{,}747$

und somit $p = 2q = 5{,}494\,\%$.

3) Die transcendente Gleichung

$$x^{2x} = 30$$

aufzulösen.

Auflösung.

Schreibt man dafür

$$2x \log x = \log 30 = 1{,}4771213,$$

setzt also

$$f(x) = 2x \log x - 1{,}4771213 = 0,$$

so findet man leicht, daß x zwischen 2 und 2,3 liegt. Setzt man daher in (2):

$\alpha = 2$; $\beta = 2{,}3$; $f(\alpha) = -0{,}2730013$; $f(\beta) = 0{,}1868265$;

so folgt:

$$w_1 = 2 + \frac{0,3 . 0,2730013}{0,2730013 + 0,1868265} = 2,17.$$

Für $\alpha = 2,17$; $\beta = 2,2$; $f(\alpha) = -0,0168863$; $f(\beta) = 0,0295385$ wird

$$w_2 = 2,17 + \frac{0,03 . 0,0168863}{0,0168863 + 0,0295385} = 2,18.$$

Für $\alpha = 2,18$; $\beta = 2,2$; $f(\alpha) = -0,001451$; $f(\beta) = 0,0295385$ folgt:

$$w_3 = 2,18 + \frac{0,02 . 0,001451}{0,001451 + 0,0295385} = 2,1809.$$

Für $\alpha = 2,1809$; $\beta = 2,2$; $f(\alpha) = -0,00006$; $f(\beta) = 0,0295385$ resultirt:

$$w_4 = 2,1809 + \frac{0,0191 . 0,00006}{0,00006 + 0,0295385} = 2,18093.$$

Setzt man in der gegebenen Gleichung $x = 2,18093$, so wird $f(x) = -0,000013$ und der Werth w_4 ist somit schon sehr genau.

§. 130. Trennung mehrer nahezu gleicher Wurzeln.

Setzen wir zunächst voraus, die Gleichung
$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$ (1)
habe zwei nahezu gleiche z. B. in den Ganzen α_0 und den r Dezimalziffern $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ mit einander übereinstimmende Wurzeln. Hat man nach irgend einer der oben gelehrten Methoden gefunden, daß die Wurzeln der Gleichung (1) zwischen $\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}$ und $\alpha_0 + \frac{\alpha_1 + 1}{10}$ liegen und man verwandelt dieselbe in eine andere, deren Wurzeln um $\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}$ kleiner sind, so enthält die resultirende Gleichung
$f(y) = y^n + B_1 y^{n-1} + \ldots + B_{n-1} y + B_n = 0$ (2)
zwei Wurzeln, welche $0,0\,\alpha_2\,\alpha_3 \ldots \alpha_r$ gemeinschaftlich haben und sich erst mit der $(r + 1)$ten Dezimalstelle trennen.

Berücksichtigt man nun, daß die beiden nahezu gleichen Wurzeln der Gleichung (2) sehr klein sind, man also, wenn es sich nur um einen annähernden Werth handelt, diejenigen Glieder der Gleichung (2), welche y in einer höheren als der zweiten

Potenz enthalten, vernachlässigen kann, so erhält man annähernd richtig:

$$B_{n-2}y^2 + B_{n-1}y + B_n = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (3).$$

Da ferner die zu suchende Wurzel nahezu als eine zweifache angesehen werden kann, so enthält nach §. 106 die hieraus abgeleitete Gleichung

$$2B_{n-2}y + B_{n-1} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (4)$$

dieselbe Wurzel annähernd.

Aus (4) ergibt sich aber sofort

$$y = -\frac{B_{n-1}}{2B_{n-2}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (5)$$

und durch Elimination von B_{n-2} aus (3) und (4):

$$y = -\frac{2B_n}{B_{n-1}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (6).$$

Da nun die beiden Ausdrücke (5) und (6) nahezu denselben Werth für y liefern, so erkennt man daraus leicht, ob beide Wurzeln auch die zweite Dezimalziffer α_2 gemeinschaftlich haben. Ist dieses der Fall, so verwandle man die Gleichung (2) in eine andere deren Wurzeln um $\frac{\alpha_2}{100}$ kleiner sind und verfahre analog wie vorhin, um zu untersuchen, ob die dritte Dezimalstelle α_3 eine gemeinschaftliche ist. In dieser Weise fährt man fort zu operiren, bis man bei einer Dezimalstelle anlangt, für welche die beiden Wurzeln sich trennen. Die Bestimmung der übrigen Wurzelziffern der zwei Wurzeln geschieht alsdann nach Früherem.

Setzen wir drei nahezu gleiche Wurzeln der Gleichung (1) voraus, so führt eine ganz analoge Betrachtung wie vorhin zu dem Schlusse, daß annähernd die drei Gleichungen bestehen:

$$B_{n-3}y^3 + B_{n-2}y^2 + B_{n-1}y + B_n = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (7)$$

$$3B_{n-3}y^2 + 2B_{n-2}y + B_{n-1} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (8)$$

$$6B_{n-3}y + 2B_{n-2} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (9).$$

Aus (9) folgt

$$y = -\frac{B_{n-2}}{3B_{n-3}}$$

und wenn man B_{n-3} aus (9) in (8) und (7) einführt:

$$B_{n-2}y + B_{n-1} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (10)$$

$$2B_{n-2}y^2 + 3B_{n-1}y + 3B_n = 0 \;.\;.\;.\; (11)$$

und nun B_{n-2} aus (10) in (11) einsetzt:

$$B_{n-1}y + 3B_n = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (12).$$

Aus (10) und (12) ergeben sich die Werthe:

$$y = -\frac{B_{n-1}}{B_{n-2}} \text{ und } y = -\frac{3B_n}{B_{n-1}}$$

und aus der Anwendung der drei Werthe

$$-\frac{B_{n-2}}{3B_{n-2}},\ -\frac{B_{n-1}}{B_{n-2}},\ -\frac{3B_n}{B_{n-1}}$$

auf die aufeinanderfolgenden transformirten Gleichungen lassen sich nun leicht die den drei Wurzeln gemeinschaftlichen Dezimalstellen bestimmen.

Für vier nahezu gleiche Wurzeln ergeben sich aus den vier Näherungsgleichungen

$$B_{n-4}y^4 + B_{n-3}y^3 + B_{n-2}y^2 + B_{n-1}y + B_n = 0$$
$$4B_{n-4}y^3 + 3B_{n-3}y^2 + 2B_{n-2}y + B_{n-1} = 0$$
$$12B_{n-4}y^2 + 6B_{n-3}y + 2B_{n-2} = 0$$
$$24B_{n-4}y + 6B_{n-3} = 0$$

durch analoge Elimination wie vorhin die genäherten Wurzelausdrücke:

$$-\frac{B_{n-3}}{4B_{n-4}},\ -\frac{2B_{n-2}}{3B_{n-3}},\ -\frac{3B_{n-1}}{2B_{n-2}},\ -\frac{4B_n}{B_{n-1}}.$$

Allgemein erhält man für m nahezu gleiche Wurzeln:

$$-\frac{B_{n-m+1}}{mB_{n-m}},\ -\frac{2B_{n-m+2}}{(m-1)B_{n-m+1}},\ -\frac{3B_{n-m+3}}{(m-2)B_{n-m+2}},\ \ldots$$
$$-\frac{(m-1)B_{n-1}}{2B_{n-2}},\ -\frac{mB_n}{B_{n-1}}.$$

Anmerkung. Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Werth dieser Brüche durch $-\frac{b}{a}$ und setzt $B_n = kb^m$, wo also a, b, k bestimmte Zahlen bedeuten, so folgt aus:

$$\frac{mB_n}{B_{n-1}} = \frac{b}{a},\ \frac{(m-1)B_{n-1}}{2B_{n-2}} = \frac{b}{a},\ \frac{(m-2)B_{n-2}}{3B_{n-3}} = \frac{b}{a},\ \ldots$$

der Reihe nach:

$$B_{n-1} = mkab^{m-1}$$
$$B_{n-2} = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{a}{b} B_{n-1} = \frac{m(m-1)}{1.2} ka^2b^{m-2}$$
$$B_{n-3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} ka^3b^{m-3}$$

. . . .

Es ist daher

$$B_n + B_{n-1}y + B_{n-2}y^2 + \ldots + B_{n-m}y^m =$$
$$= k\left[b^m + mab^{m-1}y + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2b^{m-2}y + \ldots\right]$$
$$= k\,(ay + b)^m.$$

Die (m+1) letzten Glieder der Gleichung

$$y^n + B_1 y^{n-1} + \ldots + B_{n-2} y^2 + B_{n-1} y + B_n = 0$$

stimmen daher nahezu mit $k(ay + b)^m$ überein.

Beispiele.

1) Man überzeugt sich nach Früherem leicht, daß zwei der drei Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = x^3 - 526x^2 + 1990x - 1889 = 0$$

zwischen 1,9 und 2 liegen. Verwandelt man nun die Gleichung in eine andere, deren Wurzeln um 1,9 kleiner sind, so erhält man:

$$\varphi(y) = y^3 - 520{,}3y^2 - 2{,}03y - 0{,}001 = 0$$

und hieraus nach (3) und (4):

$$y = -\frac{2B_n}{B_{n-1}} = \frac{2 \,.\, 0{,}001}{2{,}03} = 0{,}00098 \ldots$$

und $$y = -\frac{B_{n-1}}{2B_{n-2}} = \frac{2{,}03}{2 \,.\, 520{,}3} = 0{,}00195 \ldots$$

Die beiden Wurzeln stimmen somit auf 2 Dezimalstellen überein, beginnen mit 1,90 und sind nun als getrennt zu betrachten. Man findet weiter, daß die eine der Wurzeln der Gleichung $\varphi(y) = 0$ zwischen 0,003 und 0,004, die andere zwischen 0,0005 und 0,0006 liegt und erhält nach der Horner'schen Methode:

$$y_1 = 0{,}003373; \; y_2 = 0{,}000576.$$

Die entsprechenden Wurzeln der vorgelegten Gleichung $f(x) = 0$ sind daher: $x_1 = 1{,}903373$; $x_2 = 1{,}900576$ und als dritte Wurzel findet man:

$$x_3 = 522{,}196051.$$

2) Ist $f(x) = x^3 - 1806x^2 + 7332x - 7450 = 0$ die gegebene Gleichung, so ergibt sich leicht, daß dieselbe zwei zwischen 2 und 3 und zwar nahe an 2 liegende Wurzeln hat. Bildet man nun eine Gleichung, deren Wurzeln um 2 kleiner sind, als die der Gleichung $f(x) = 0$, so folgt dafür:

$$y^3 - 1800y^2 + 120y - 2 = 0$$

und man findet nach (3) und (4):

$$-\frac{2B_n}{B_{n-1}} = \frac{4}{120} = 0{,}033 \ldots$$

$$-\frac{B_{n-1}}{2B_{n-2}} = \frac{120}{3600} = 0{,}033 \ldots$$

Vermindert man die Wurzeln der vorstehenden Gleichung nun um 0,03, so resultirt als entsprechende Gleichung:

$$y^3 - 1799{,}91\,y^2 + 12{,}0027\,y - 0{,}019973 = 0$$

und hiernach wird

$$-\frac{2B_n}{B_{n-1}} = \frac{0{,}039946}{12{,}0027} = 0{,}00332 \ldots$$

$$-\frac{B_{n-1}}{2B_{n-2}} = \frac{12{,}0027}{3599{,}82} = 0{,}00333 \ldots$$

Durch Verminderung der Wurzeln der letzten Gleichung um 0,003 geht dieselbe über in:

$$y^3 - 1799{,}901\,y^2 + 1{,}203267\,y - 0{,}000164063 = 0,$$

woraus folgt:

$$-\frac{2B_n}{B_{n-1}} = \frac{0{,}000328126}{1{,}203267} = 0{,}000272 \ldots$$

$$-\frac{B_{n-1}}{2B_{n-2}} = \frac{1{,}203267}{3599{,}802} = 0{,}000334 \ldots$$

Die Wurzeln sind somit als getrennt zu betrachten.

Setzt man nun in der letzten Gleichung der Reihe nach 0,0001; 0,0002; u. s. w. statt y, so überzeugt man sich bald, daß eine Wurzel zwischen 0,0001 und 0,0002, die andere zwischen 0,0004 und 0,0005 liegt.

Um die erste zu bestimmen, vermindere man die Wurzeln der Gleichung um 0,0001, so erhält man statt derselben:

$$y^3 - 1799{,}9007\,y^2 + 0{,}84328683\,y - 0{,}000061735309 = 0$$

und würde hieraus nach der Horner'schen Methode als genäherten Werth finden:

$$\frac{0{,}000061735309}{0{,}84328683} = 0{,}0000732.$$

Da aber dieser Werth des großen Coefficienten von y^2 wegen zweifelhaft ist, so setze man zur Prüfung für y der Reihe nach

0,00007; 0,00008; 0,00009; 0,0001

in die Gleichung. Aus den für das Polynom hiernach resultirenden Werthen erkennt man alsdann sofort, daß die Wurzel zwischen 0,00009 und 0,0001 liegt, also 0,00007 in der That ein unbrauchbarer Werth ist*). Die entsprechende Wurzel der ursprünglichen Gleichung $f(x) = 0$ ist somit

$$x_1 = 2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0001 + 0{,}00009 = 2{,}03319.$$

Um nun die zwischen 0,0004 und 0,0005 liegende Wurzel obiger Gleichung

$$y^3 - 1799{,}901\,y^2 + 1{,}203267\,y - 0{,}000164063 = 0$$

zu bestimmen, vermindere man die Wurzeln derselben zunächst um 0,0004. Man erhält dann als entsprechende Gleichung:

$$y^3 - 1799{,}8998\,y^2 - 0{,}23665332\,y + 0{,}000029259704 = 0,$$

woraus sich ergeben würde:

$$y = \frac{0{,}000029259704}{0{,}23665332} = 0{,}00012 \ldots$$

Da dieser Werth jedoch nicht richtig sein kann, welches eine Folge des großen Coefficienten von y^2 ist, so bestimme man durch Substitution die Grenzen der Wurzel. Man findet, daß dieselbe

---

*) Zu diesem Resultate hätte auch das Verfahren nach der Anmerkung zu §. 125 geführt.

zwischen 0,00007 und 0,00008 liegt, also für die zu suchende Wurzel

$$x_2 = 2 + 0,03 + 0,003 + 0,0004 + 0,00007 = 2,03347.$$

Endlich erhält man für die dritte Wurzel

$$x_3 = 1801,93334.$$

§. 131. Aufgaben zur Uebung.

Die reellen Wurzeln der nachstehenden Gleichungen zu bestimmen:

1) $x^3 - 9x^2 + 15x - 5 = 0.$
2) $x^3 - 9x^2 - 12x + 24 = 0.$
3) $x^4 + x^3 + 3x^2 + 11x + 2 = 0.$
4) $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1 = 0.$
5) $x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0.$
6) $x^4 - 8x^3 - x - 1 = 0.$
7) $x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 5x - 3 = 0.$
8) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0.$
9) $x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0.$
10) $x^4 - x - 6 = 0.$
11) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 11x + 1 = 0.$
12) $x^4 - 2x^3 + 9x^2 + 5x - 1 = 0.$
13) $x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 2x - 1 = 0.$
14) $x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 8x - 1 = 0.$
15) $x^4 - 8x^3 - 5x - 10 = 0.$
16) $x^4 - 2x^3 - 6x + 3 = 0.$
17) $x^4 + 10x^3 - 4x - 10 = 0.$
18) $x^4 + 6x^3 - 4x - 6 = 0.$
19) $x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0.$
20) $x^3 - 10x^2 + 11x - 3 = 0.$
21) $x^3 + 6x^2 - 8x + 2 = 0.$

(19–21:) Nach der Methode von Lagrange!

22) $x^4 + 15x^2 + 2x - 3 = 0.$
23) $x^5 - 5x - 10 = 0.$
24) $x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + x - 1 = 0.$
25) $x^5 - 12x^4 + 44x^3 - 117x^2 + 304x + 102 = 0.$
26) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10x^2 - 15x - 1 = 0.$
27) $x^5 - 24x^4 + 221x^3 - 946x^2 + 1740x - 902 = 0.$
28) $x^6 - 6x^5 - 66x^4 - 134x^3 + 1223x^2 + 2500x + 2562 = 0.$
29) $x^6 + 2x^5 - 56x^4 + 4x^3 + 380x^2 + 304x - 96 = 0$

30) $x^6 + 12x^5 + 4x^4 - 332x^3 - 852x^2 - 104x + 720 = 0.$
31) $x^6 - 6x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x + 1 = 0.$
32) $x^6 - 6x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 6x + 1 = 0.$
33) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - 6x^3 - 18x^2 + 7 = 0.$
34) $x^6 - 12x^5 + 54x^4 - 102x^3 + 45x^2 + 54x + 2 = 0.$
35) $x^6 + 6x^5 + 3x^4 - 20x^3 + 3x^2 + 6x - 4 = 0.$

c) Auflösung der binomischen und trinomischen Gleichungen.

§. 132. Auflösung der binomischen Gleichungen.

1) Jede Gleichung von der Form

$$y^n \pm a = 0$$

heißt eine binomische Gleichung.

Setzt man hierin $y^n = ax^n$,

also $y = x\sqrt[n]{a}$,

so geht dieselbe über in

$$x^n \pm 1 = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (1)$$

Da sich hiernach jede binomische Gleichung auf die einfachere Form (1) bringen läßt, so werden wir auch nur diese unseren nachfolgenden Betrachtungen zu Grunde legen.

2) Betrachten wir zuerst die Gleichung

$$x^n - 1 = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (2)$$

so folgt daraus unmittelbar:

$$x = \sqrt[n]{+1}$$

oder

$$x = \sqrt[n]{+1} = \cos\frac{4k\Re}{n} \pm i\sin\frac{4k\Re}{n}{}^{*)} \; \ldots\ldots \; (3)$$

*) Nach der Moivre'schen Formel (Thl. I. §. 116a, Zus. 3) ist nämlich

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\alpha}{n} \pm i\sin\frac{\alpha}{n}.$$

Bezeichnet nun k eine ganze positive oder negative Zahl und man setzt in vorstehender Gleichung $\alpha + 4k\Re$ statt α, also

$\sin(\alpha + 4k\Re) = \sin\alpha$ und $\cos(\alpha + 4k\Re) = \cos\alpha$

so geht dieselbe über in

$$(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\alpha + 4k\Re}{n} \pm i\sin\frac{\alpha + 4k\Re}{n}$$

und wenn man hierin $\alpha = 0$ setzt, resultirt:

$$1^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{4k\Re}{n} \pm i\sin\frac{4k\Re}{n}.$$

Aus diesem Ausdrucke erhält man sämmtliche n Wurzeln der Gleichung (2), wenn man darin der Reihe nach statt k bei einem geraden n die Werthe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \frac{n}{2}$$

und bei einem ungeraden n die Werthe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \frac{n-1}{2}$$

setzt.

Man bekommt nämlich

1) wenn n gerade ist:

$$+1;\ \cos\frac{4\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{4\mathfrak{R}}{n};\ \cos\frac{8\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{8\mathfrak{R}}{n};$$

$$\ldots\ \cos\frac{2(n-2)\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{2(n-2)\mathfrak{R}}{n};\ -1;$$

2) wenn n ungerade ist:

$$+1;\ \cos\frac{4\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{4\mathfrak{R}}{n};\ \cos\frac{8\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{8\mathfrak{R}}{n};$$

$$\ldots\ \cos\frac{2(n-3)\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{2(n-3)\mathfrak{R}}{n};$$

$$\cos\frac{2(n-1)\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{2(n-1)\mathfrak{R}}{n}.$$

Im ersten Falle hat also $\sqrt[n]{+1}$ zwei reelle Wurzeln, im anderen Falle nur eine.

3) Bildet man das Produkt der den zwei conjugirten Wurzeln

$$\cos\frac{4k\mathfrak{R}}{n} + i\sin\frac{4k\mathfrak{R}}{n} \text{ und } \cos\frac{4k\mathfrak{R}}{n} - i\sin\frac{4k\mathfrak{R}}{n}$$

entsprechenden Wurzelfaktoren

$$x - \left(\cos\frac{4k\mathfrak{R}}{n} + i\sin\frac{4k\mathfrak{R}}{n}\right) \text{ und } x - \left(\cos\frac{4k\mathfrak{R}}{n} - i\sin\frac{4k\mathfrak{R}}{n}\right),$$

so erhält man das reelle Produkt

$$x^2 - 2x\cos\frac{4k\mathfrak{R}}{n} + 1 \ \ldots\ldots\ (4)$$

Setzt man hierin für k der Reihe nach die oben angeführten Werthe und berücksichtigt, daß für $k = 0$, der Faktor $x - 1$, und bei einem geraden n für $k = \frac{n}{2}$ der Faktor $x + 1$ nur

einmal zu nehmen ist, weil $\sqrt[n]{+1}$ die Wurzel + 1 nur einmal und im zweiten Falle die Wurzel − 1 nur einmal enthält, so erhält man sämmtliche quadratische Faktoren des Binoms $x^n - 1$.

Man hat daher,

1) wenn n gerade ist:

$$x^n - 1 = (x-1)(x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\Re}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{8\Re}{n} + 1\right) \ldots$$
$$\ldots \left(x^2 - 2x\cos\frac{2(n-2)}{n}\Re + 1\right)$$

2) wenn n ungerade ist:

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\Re}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\frac{\cos 8\Re}{n} + 1\right) \ldots$$
$$\ldots \left(x^2 - 2x\cos\frac{2(n-1)}{n}\Re + 1\right)$$

Beispiel.

1) Ist $x^2 - 1 = 0$,
also $n = 2$, so hat man nach (3):

$$x = \cos\frac{4k\Re}{2} \pm i\sin\frac{4k\Re}{2}$$

und erhält hieraus, wenn man $k = 0$ und 1 setzt, bezüglich
$x = \cos 0^0 = +1$ und $x = \cos 2\Re = -1$.

2) Es sei $x^3 - 1 = 0$,
also $n = 3$ und nach (3):

$$x = \cos\frac{4k\Re}{3} \pm i\sin\frac{4k\Re}{3},$$

so ergibt sich hieraus
für $k = 0 : x = \cos 0^0 = +1$
„ $k = 1 : x = \cos\frac{4\Re}{3} \pm i\sin\frac{4\Re}{3} = -\cos 60^0 \pm i\sin 60^0$
$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}).$$

Die 3 Wurzeln sind somit:

$$+1,\ \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}).$$

4) Gehen wir nun zur Untersuchung der Gleichung

$$x^n + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

über, so erhalten wir hieraus sofort:

$$x = \sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)2\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{(2k+1)2\mathfrak{R}}{n}\text{*)} \;\ldots.\; (6)$$

Man findet hieraus sämmtliche n Wurzeln der Gleichung (5), wenn man der Reihe nach statt k bei einem geraden n die Werthe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ \frac{n}{2} - 1$$

und bei einem ungeraden n die Werthe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ \frac{n-1}{2}$$

setzt.

Man bekommt nämlich,

1) wenn n gerade ist:

$$\cos\frac{2\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{2\mathfrak{R}}{n};\ \cos\frac{6\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{6\mathfrak{R}}{n};$$

$$\cos\frac{10\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{10\mathfrak{R}}{n};\ \ldots.\ \cos\frac{2(n-1)\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{2(n-1)\mathfrak{R}}{n}$$

2) wenn n ungerade ist:

$$\cos\frac{2\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{2\mathfrak{R}}{n};\ \cos\frac{6\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{6\mathfrak{R}}{n};$$

$$\cos\frac{10\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{10\mathfrak{R}}{n};\ \ldots.\ \cos\frac{2(n-2)\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{2(n-2)\mathfrak{R}}{n}.$$

5) Bildet man wieder das Produkt der den conjugirten Wurzeln

$$\cos\frac{(2k+1)2\mathfrak{R}}{n} + i\sin\frac{(2k+1)2\mathfrak{R}}{n} \text{ u. } \cos\frac{(2k+1)2\mathfrak{R}}{n} - i\sin\frac{(2k+1)2\mathfrak{R}}{n}$$

entsprechenden Wurzelfaktoren

$$x - \left[\cos\frac{(2k+1)2\mathfrak{R}}{n} + i\sin\frac{(2k+1)2\mathfrak{R}}{n}\right]$$

$$\text{und } x - \left[\cos\frac{(2k+1)2\mathfrak{R}}{n} - i\sin\frac{(2k+1)2\mathfrak{R}}{n}\right]$$

---

*) Denn setzt man in der Gleichung

$$(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\alpha+4k\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{\alpha+4k\mathfrak{R}}{n}$$

$\alpha = 2\mathfrak{R}$, so resultirt:

$$(-1)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)2\mathfrak{R}}{n} \pm i\sin\frac{(2k+1)2\mathfrak{R}}{n}.$$

so erhält man das reelle Produkt

$$x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)2\mathfrak{R}}{n} + 1$$

und somit, wenn man für k der Reihe nach die oben angeführten Werthe setzt und berücksichtigt, daß bei einem ungeraden n für $k = \frac{n-1}{2}$ der Faktor $x + 1$ nur einmal zu nehmen ist, weil $\sqrt[n]{-1}$ in diesem Falle die Wurzel -1 nur einmal enthält,

1) für ein gerades n:

$$x^n + 1 = \left(x^2 - 2x \cos \frac{2\mathfrak{R}}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x \cos \frac{6\mathfrak{R}}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x \cos \frac{10\mathfrak{R}}{n} + 1\right) \ldots \left(x^2 - 2x \cos \frac{(n-1)2\mathfrak{R}}{n} + 1\right)$$

2) für ein ungerades n:

$$x^n + 1 = \left(x^2 - 2x \cos \frac{2\mathfrak{R}}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x \cos \frac{6\mathfrak{R}}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x \cos \frac{10\mathfrak{R}}{n} + 1\right) \ldots \left(x^2 - 2x \cos \frac{(n-2)2\mathfrak{R}}{n} + 1\right)(x+1).$$

6) Die Gleichung (5) läßt sich auch leicht auf eine Gleichung von der zuerst behandelten Form (2) zurückführen.

Setzt man zu diesem Ende in der Gleichung

$$x^n + 1 = 0$$

$$x = y \left(\cos \frac{2\mathfrak{R}}{n} + i \sin \frac{2\mathfrak{R}}{n}\right) \ldots\ldots (7)$$

also $\quad x^n = y^n (\cos 2\mathfrak{R} + i \sin 2\mathfrak{R})$

oder $\quad x^n = -y^n$

so geht dieselbe über in die gewünschte Gleichung:

$$y^n - 1 = 0.$$

Es ist daher nach (3)

$$y = \cos \frac{4k\mathfrak{R}}{n} \pm i \sin \frac{4k\mathfrak{R}}{n}$$

also nach (7):

$$x = \left(\cos \frac{4k\mathfrak{R}}{n} \pm i \sin \frac{4k\mathfrak{R}}{n}\right)\left(\cos \frac{2\mathfrak{R}}{n} \pm i \sin \frac{2\mathfrak{R}}{n}\right)$$

$$= \cos \frac{(2k+1)2\mathfrak{R}}{n} \pm i \sin \frac{(2k+1)2\mathfrak{R}}{n}$$

wie in (6).

Beispiele.

1) Ist $x^2 + 1 = 0$ die gegebene Gleichung, so hat man nach (6):

$$x = \cos (2k+1)\Re \pm i \sin (2k+1)\Re$$

und findet hiernach

$$\text{für } k = 0 : x = \cos \Re \pm i \sin \Re = \pm i.$$

2) Es sei $x^3 + 1 = 0$, so wird nach (6)

$$x = \cos \frac{(2k+1)2\Re}{3} \pm i \sin \frac{(2k+1)2\Re}{3}$$

und hiernach

$$\text{für } k = 0 : x = \cos \frac{2\Re}{3} \pm i \sin \frac{2\Re}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{3} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}),$$

$$\text{für } k = 1 : x = \cos 2\Re \pm i \sin 2\Re = -1.$$

Die 3 Wurzeln sind daher:

$$-1;\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3});\ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3}).$$

3) Ist $x^4 + 1 = 0$, so wird nach (6)

$$x = \cos \frac{(2k+1)2\Re}{4} \pm i \sin \frac{(2k+1)2\Re}{4}$$

und somit

$$\text{für } k = 0 : x = \cos \frac{\Re}{2} \pm i \sin \frac{\Re}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2} = \frac{1 \pm i}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{für } k = 1 : x = \cos \frac{3\Re}{2} \pm i \sin \frac{3\Re}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2} = \frac{-1 \pm i}{2}\sqrt{2}.$$

Die 4 Wurzeln sind daher:

$$\frac{1+i}{2}\sqrt{2};\ \frac{1-i}{2}\sqrt{2};\ \frac{-1+i}{2}\sqrt{2};\ \frac{-1-i}{2}\sqrt{2}.$$

Anmerkung. Die Auflösung der binomischen Gleichungen (2) und (5) läßt sich auch auf die Auflösung reciproker Gleichungen zurückführen.

Je nachdem nämlich in der Gleichung (2) n gerade oder ungerade ist, hat dieselbe die zwei reellen Wurzeln -1 und $+1$ oder nur die reelle Wurzel $+1$. Das betreffende Gleichungspolynom ist somit bezüglich durch $x^2 - 1$ oder durch $x - 1$ theilbar. Ist dagegen in Gleichung (5) n ungerade, so ist -1 eine Wurzel derselben und das betreffende Polynom durch $(x + 1)$ theilbar. Führt man in den bezeichneten Fällen

die angedeutete Division aus und setzt den Quotienten Null, so resultirt eine reciproke Gleichung, deren Wurzeln die noch übrigen Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Ist z. B. $x^5 - 1 = 0$
die vorgelegte Gleichung und man dividirt das Polynom $(x^5 - 1)$ durch den Wurzelfaktor $(x-1)$ und setzt den erhaltenen Quotienten Null, so folgt:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

oder
$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0$$

und wenn man
$$x + \frac{1}{x} = y$$

also
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

setzt,
$$y^2 + y - 1 = 0.$$

Man findet hieraus:

$$y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

und aus
$$x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

oder
$$x^2 - \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}x = -1:$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{-10 \mp 2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \pm \frac{i}{4}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}$$

Die 5 Wurzeln sind daher:

$$1,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \pm \frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};\ \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \pm \frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

oder $1;\ 0{,}309017 \pm i \,.\, 0{,}951056;\ -0{,}809017 \pm i \,.\, 0{,}587785.$

Aus Gleichung (3) würde man aus

$$x = \cos\frac{4k\Re}{5} \pm i \sin\frac{4k\Re}{5}$$

ebenso erhalten haben:
für $k = 0 : x = \cos 0^0 = 1;$
„ $k = 1 : x = \cos 72^0 \pm i \sin 72^0 = 0{,}309017 \pm i \,.\, 0{,}951056;$
„ $k = 2 : x = \cos 144^0 \pm i \sin 144^0 = -0{,}809017 \pm i \,.\, 0{,}587785.$

§. 133. Auflösung der trinomischen Gleichungen.

1) Jede Gleichung von der Form

$$x^{2n} + ax^n + b = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

wo wir a und b als reell voraussetzen, heißt eine trinomische Gleichung.

Behandelt man dieselbe nach Art der quadratischen Gleichungen, so folgt:

$$x^n = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \ldots\ldots (2)$$

Ist nun $$\frac{a^2}{4} > b$$

also $\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ reell, so ist die Auflösung der trinomischen Gleichung (1) auf die Auflösung der zwei quadratischen Gleichungen

$$x^n + \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = 0$$

zurückgeführt und kann leicht nach §. 130 bewerkstelligt werden.

Ist dagegen $$\frac{a^2}{4} < b$$

also $\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ imaginär, so erhält man zwei binomische Gleichungen von der Form:

$$x^n = A + i\,B \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

und

$$x^n = A - i\,B \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

wo also

$$A = -\frac{a}{2}$$

$$B = \sqrt{-\frac{a^2}{4} + b}$$

somit

$$A^2 + B^2 = b$$

ist.

Es sei nun $t + iu$ eine Wurzel der Gleichung (3), also

$$(t + iu)^n = A + iB,$$

so ist

$$(t - iu)^n = A - iB$$

nnd somit $t - iu$ eine Wurzel der Gleichung (4).

Nun kann aber $t - iu$ nicht auch eine Wurzel der Gl. (3) sein, denn sonst wäre

$$(t - iu)^n = A + iB$$

also

$$A + iB = A - iB$$

oder

$$B = 0.$$

Sind ferner $t_1 + iu_1$ und $t_2 + iu_2$ zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung (3), so sind auch $t_1 - iu_1$ und $t_2 - iu_2$ zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung (4); denn aus

$$t_1 - iu_1 = t_2 - iu_2$$

würde nach dem oben Vorgetragenen im Widerspruche mit der Voraussetzung folgen, daß auch

$$t_1 + iu_1 = t_2 + iu_2$$

wäre.

Sämmtliche Wurzeln der Gleichung (4) sind daher beziehungsweise die conjugirten Werthe der sämmtlichen Wurzeln der Gl. (3) und es genügt somit nur die Auflösung dieser Gleichung kennen zu lernen.

Aus
$$x^n = A + iB$$
folgt:
$$x = \sqrt[n]{A + iB}$$
oder wenn α einen Winkel bezeichnet, welcher den Gleichungen
$$A = r\cos\alpha,\ B = r\sin\alpha$$
genügt, also
$$r^2 = A^2 + B^2 = b,\ r = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{b}$$
ist und man setzt
$$A + iB = r\ (\cos\alpha + i\sin\alpha),$$
auch:
$$x = r^{\frac{1}{n}}\ (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{1}{n}}$$
oder nach der Note auf S. 279:
$$x = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 4k\mathfrak{R}}{n} + i\sin\frac{\alpha + 4k\mathfrak{R}}{n}\right)$$
$$= \sqrt[2n]{b}\left(\cos\frac{\alpha + 4k\mathfrak{R}}{n} + i\sin\frac{\alpha + 4k\mathfrak{R}}{n}\right)$$
Setzt man hierin für k der Reihe nach 0, 1, 2, 3, ... (n—1), so erhält man die Wurzeln der Gleichung (3).

Die Wurzeln der Gleichung (4) werden daher nach Obigem erhalten, wenn man in der Gleichung
$$x = \sqrt[2n]{b}\left(\cos\frac{\alpha + 4k\mathfrak{R}}{n} - i\sin\frac{\alpha + 4k\mathfrak{R}}{n}\right)$$
der Reihe nach für k die Werthe 0, 1, 2, 3, ... (n—1) einführt*).

---

*) Zu diesem Resultate gelangt man auch unabhängig von obiger Entwickelung, wenn man
$$x^n = A + iB = \frac{A^2 + B^2}{A - iB}$$
oder
$$A - iB = \frac{A^2 + B^2}{x^n} = \left(\frac{\sqrt[n]{A^2 + B^2}}{x}\right)^n = \left(\frac{\sqrt[n]{b}}{x}\right)^n$$
setzt. Ist nun x eine Wurzel der Gleichung (3), so ist hiernach $\frac{\sqrt[n]{b}}{x}$ eine Wurzel

Sämmtliche Wurzeln der trinomischen Gleichung (1) werden somit erhalten, wenn man in den beiden Ausdrücken

$$\sqrt[2n]{b}\left(\cos\frac{\alpha+4k\Re}{n}+i\sin\frac{\alpha+4k\Re}{n}\right)\ \ldots\ldots\ (5)$$

und

$$\sqrt[2n]{b}\left(\cos\frac{\alpha+4k\Re}{n}-i\sin\frac{\alpha+4k\Re}{n}\right)\ \ldots\ldots\ (6)$$

für k der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, 3, ... (n—1) setzt.

2) Bildet man das Produkt zweier conjugirten Wurzelfaktoren, so erhält man:

$$\left[x-\sqrt[2n]{b}\left(\cos\frac{\alpha+4k\Re}{n}+i\sin\frac{\alpha+4k\Re}{n}\right)\right]\left[x-\sqrt[2]{b}\left(\cos\frac{\alpha+4k\Re}{n}-i\sin\frac{\alpha+4k\Re}{n}\right)\right]$$

$$=x^2-2x\sqrt[2n]{b}\cos\frac{\alpha+4k\Re}{n}+\sqrt[n]{b},$$

also einen reellen quadratischen Faktor der trinomischen Gleichung.

Um hiernach sämmtliche quadratische Faktoren von

$$x^{2n}+ax^n+b$$

zu erhalten, hat man in vorstehendem allgemeinen Ausdrucke nur wieder für k der Reihe nach 0, 1, 2, 3, ... (n—1) zu setzen.

Beispiel.

Um die Wurzeln der Gleichung

$$x^4+ax^2+b=0$$

zu bestimmen, wenn $\frac{a^2}{4}<b$ ist, setze man:

$$n=2,\ r=\sqrt{b},\ A=-\frac{a}{2}=r\cos\alpha,\ B=\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}=r\sin\alpha$$

also $$\cos\alpha=-\frac{a}{2\sqrt{b}},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}{\sqrt{b}},$$

so folgt aus (5) und (6)

$$\text{für } k=0:x=\sqrt[4]{b}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\pm i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

---

der Gleichung (4). Man findet aber:

$$\frac{\sqrt[n]{b}}{x}=\frac{\sqrt[2n]{b^2}}{\sqrt[2n]{b}\left(\cos\frac{\alpha+4k\Re}{n}+i\sin\frac{\alpha+4k\Re}{n}\right)}$$

$$=\sqrt[2n]{b}\left(\cos\frac{\alpha+4k\Re}{n}-i\sin\frac{\alpha+4k\Re}{n}\right)$$

für $k = 1 : x = -\sqrt[4]{b}\left(\cos\frac{\alpha}{2} \pm i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

wofür man, da

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha = 1 - \frac{a}{2\sqrt{b}} = \frac{2\sqrt{b}-a}{2\sqrt{b}}$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha = 1 + \frac{a}{2\sqrt{b}} = \frac{2\sqrt{b}+a}{2\sqrt{b}}$$

ist, auch setzen kann:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{b}-a} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{b}+a}$$

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{b}-a} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{b}+a}.$$

Sechster Abschnitt.

Einleitung zur Lehre von den Determinanten.

§. 134. Inversionen einer Complexion.

1) Werden die Elemente einer Complexionsform durch Indices bezeichnet, so nennen wir das Element a_m ein höheres als a_n, wenn $m > n$ ist. Sind nun alle Elemente nach steigenden Indices geordnet, so sagt man die betreffende Complexionsform enthalte keine Inversion, im anderen Falle hat dieselbe so viele Inversionen als die Zahl ausdrückt, welche angibt wie vielmal ein höheres Element vor einem niedrigeren steht.

So enthält z. B. die Permutationsform $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ keine Inversion, dagegen $a_3\ a_1\ a_4\ a_2$ die 3 Inversionen: $a_3\ a_1$, $a_3\ a_2$, $a_4\ a_2$, und $a_5\ a_3\ a_2\ a_1\ a_4$ die 7 Inversionen: $a_5\ a_3$, $a_5\ a_2$, $a_5\ a_1$, $a_5\ a_4$, $a_3\ a_2$, $a_3\ a_1$, $a_2\ a_1$.

2) Die Permutationen gegebener Elemente werden hiernach in zwei Klassen getheilt, je nachdem die Anzahl ihrer Inversionen eine gerade oder eine ungerade ist.

3) Sind A und B zwei Gruppen von Elementen in bestimmter Aufeinanderfolge und bezeichnen wir durch (A) und (B) bezüglich die Anzahl der Inversionen in den beiden Gruppen, durch (AB) die Anzahl der Inversionen in der combinirten Gruppe und durch (A,B) diejenige Anzahl der Inversionen, welche entsteht, wenn man jedes Element der Gruppe A mit jedem Elemente der Gruppe B vergleicht, so ist offenbar:

$$(AB) = (A) + (B) + (A,B)$$

und analog:

$$(ABC) = (A) + (B) + (C) + (A,B) + (A,C) + (B,C).$$

$$(ABCD) = (A) + (B) + (C) + (D) + (A,B) + (A,C) + (A,D) + (B,C) + (B,D) + (C,D) \text{ u. s. w.}$$

Wir entwickeln hieraus folgende Sätze:

a) Setzt man das niederste Element a_1 vor A, so enthält a_1A so viele Inversionen als A allein, d. h. es ist

$$(a_1A) = (A).$$

Die beiden Permutationen a_1A und A gehören somit zur nämlichen Klasse.

So hat z. B. $a_1\ a_3\ a_2\ a_5\ a_4$ dieselben Inversionen wie $a_3\ a_2\ a_5\ a_4$, nämlich: $a_3\ a_2$ und $a_5\ a_4$.

b) Setzt man das niederste Element a_1 nach A, und enthält diese Gruppe α Elemente, unter welchen a_1 nicht vorkommt, so ist

$$(Aa_1) = (A) + \alpha.$$

Die Permutationen Aa_1 und A gehören demnach zu gleichen oder verschiedenen Klassen, je nachdem die Anzahl der Elemente α gerade oder ungerade ist.

Z. B. für $(A) = a_5\ a_3\ a_4\ a_2$ hat man $(A) = 5$, $\alpha = 4$, $(Aa_1) = 5 + 4 = 9$.

Dagegen für $(A) = a_4\ a_2\ a_3$ ist: $(A) = 2$, $\alpha = 3$ und $(Aa_1) = 3 + 2 = 5$.

Im ersten Falle gehören Aa_1 und A in die nämliche, im zweiten aber in verschiedene Klassen.

c) Setzt man das niederste Element a_1 zwischen die Gruppen A und B, welche bezüglich α und β Elemente enthalten, worunter sich a_1 nicht befindet, so ist:

$$(Aa_1B) = (A) + (B) + \alpha + (A,B)$$
$$= (AB) + \alpha.$$

Die Permutationen Aa_1B und AB gehören hiernach in gleiche oder verschiedene Klassen, je nachdem die Anzahl α der Elemente in A gerade oder ungerade ist.

d) Bildet man sämmtliche Permutationen gegebener Elemente, so enthalten diese von jeder der beiden Klassen gleich viele Complexionen.

Denn sehen wir die Permutationsformen der ersten Klasse als positiv, die der zweiten als negativ an, so erhalten wir zunächst für 2 Elemente a_2, a_3:

$$a_2\ a_3 - a_3\ a_2.$$

Um hieraus die Permutationen von 3 Elementen a_1, a_2, a_3 zu bilden, setzen wir a_1 der Reihe nach an die 1te, 2te, 3te Stelle und erhalten nach a) — c):

$$a_1\ a_2\ a_3 - a_1\ a_3\ a_2 - a_2\ a_1\ a_3 + a_3\ a_1\ a_2 + a_2\ a_3\ a_1 - a_3\ a_2\ a_1.$$

Vorstehender Satz gilt somit für 2 und 3 Elemente. Nehmen wir nun an, er sei auch für die n Elemente $a_2, a_3, \ldots a_{n+1}$ giltig, so werden die Permutationen der (n + 1) Elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n+1}$ aus den Permutationen jener n Elemente erhalten, wenn man a_1 der Reihe nach an die 1te, 2te, ... (n + 1)te Stelle setzt. Schreibt man aber a_1 an die erste Stelle, so ändern nach a) die Permutationsformen ihre Klassen nicht und beide Klassen enthalten gleich viele Permutationsformen. In allen anderen Fällen, die wir durch Aa_1B und Aa_1 ausdrücken können, verbleiben nach b) und c) die betreffenden Permutationsformen in ihren Klassen oder gehen in die andere über, je nachdem die Anzahl der in A enthaltenen Elemente gerade oder ungerade ist, so daß also wiederum von beiden Klassen gleich viele Permutationsformen auftreten. Es ist somit auch die Gesammtzahl der Permutationsformen für (n + 1) Elemente in beiden Klassen gleich groß.

Anmerkung. Um die Permutationen der (n + 1) Elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n+1}$ mit Rücksicht auf die Zeichen aus denen der n Elemente $a_2, a_3, \ldots a_{n+1}$ zu bilden, setze man zuerst a_1 allen Permutationen der n Elemente vor, unter Beibehaltung der Zeichen, dann schreibe man a_1 in sämmtlichen Permutationen an die 2te Stelle und ändere die Zeichen, darnach gebe man a_1 die 3te Stelle unter Beibehaltung der Zeichen u. s. f.

e) Sind a_g und a_h zwei Elemente mit verschiedenen Indices g und h, so ist

$$(a_g\ a_h) + (a_h\ a_g) = 1.$$

f) Ist A eine Gruppe von α Elementen, unter welchen das Element a_g nicht vorkommt, so sind die zwei Zahlen $(A,a_g) + (a_g,A)$ und α gleichzeitig gerade oder ungerade, also ist deren Differenz stets gerade.

Denn ist $$A = a_{x_1} + a_{x_2} + \ldots + a_{x_\alpha}$$
so hat man:

$$(A,a_g) = (a_{x_1}\ a_g) + (a_{x_2}\ a_g) + \ldots + (a_{x_\alpha}\ a_g)$$
$$(a_g,A) = (a_g\ a_{x_1}) + (a_g\ a_{x_2}) + \ldots + (a_g\ \ a_{x_\alpha})$$

also nach e):

$$(A,a_g) + (a_g,A) = \overset{1}{\check{1}} + \overset{2}{\check{1}} + \ldots + \overset{\alpha}{\check{1}} = \alpha \ldots (\mu).$$

Da aber $(Aa_g) = (A) + (A,a_g)$ und $(a_gA) = (a_g,A) + (A)$ so folgt nach (μ): $(Aa_g) + (a_gA) = 2\ (A) + \alpha$.

Die beiden Permutationsformen Aa_g und a_gA gehören somit gleichzeitig in einerlei oder verschiedene Klassen, jenachdem die Anzahl der Elemente von A gerade oder ungerade ist.

§. 135. Lehrsatz.

Vertauscht man in einer Permutationsform zwei Elemente mit einander, während alle übrigen ihre Stellung beibehalten, so ändert sich die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl.

Beweis.

Sind a_g und a_h die zwei Elemente, welche ihre Stelle vertauschen, A, B, C Gruppen von α, β, γ Elementen, so ist die Anordnung der Elemente in den beiden Permutationsformen ausgedrückt durch:

$$A a_g B a_h C \text{ und } A a_h B a_g C.$$

Bezeichnen nun x und y die den beiden Permutationsformen entsprechenden Inversionszahlen, so hat man:

$$x = (A) + (B) + (C) + (A,a_g) + (A,B) + (A,a_h) \\ + (A,C) + (a_g,B) + (a_g\ a_h) + (a_g,C) + (B,a_h) \\ + (B,C) + (a_h,C)$$

$$y = (A) + (B) + (C) + (A,a_h) + (A,B) + (A,a_g) \\ + (A,C) + (a_h,B) + (a_h\ a_g) + (a_h,C) + (B,a_g) \\ + (B,C) + (a_g,C).$$

Durch Addition folgt hieraus, wenn man

$$(A) + (B) + (C) + (A,a_g) + (A,B) + (A,a_h) + (A,C) \\ + (a_g,C) + (B,C) + (a_h,C) = n$$

setzt:

$$x + y = 2n + (a_g,B) + (B,a_g) + (B,a_h) + (a_h,B) \\ + (a_g\ a_h) + (a_h\ a_g),$$

oder nach §. 134 3. e und f Gl. (μ):

$$x + y = 2n + \beta + \beta + 1 \\ = 2(n + \beta) + 1.$$

Es ist somit $x + y$ eine ungerade Zahl und da $(x + y) + (x - y) = 2x$, also gerade ist, diese beiden Zahlen somit gleichzeitig gerade oder ungerade sind, so ist auch $x - y$ eine ungerade Zahl.

Zusätze.

1) Da man nach §. 4 durch Vertauschung von jedesmal nur zwei Elementen alle Permutationen gegebener Elemente

erhalten kann, nach obigem Satze sich die Anzahl der Inversionen dabei jedesmal um eine ungerade Zahl ändert und eine algebraische Summe von ungeraden Zahlen gerade oder ungerade ausfällt, je nachdem ihre Anzahl gerade oder ungerade ist, so sind die, den aufeinander folgenden Permutationen entsprechenden Inversionen abwechselnd gerade oder ungerade.

2) In jeder Klasse gibt es gleich viele Permutationsformen, weil für $n > 1$ die Anzahl $n!$ der Permutationen gerade ist. (Vergl. §. 134 3. d).

3) Da in der ersten Complexion $a_1, a_2, a_3, \ldots$ keine Inversion vorkommt, so läßt sich jede Permutationsform der $\begin{matrix}\text{ersten}\\\text{zweiten}\end{matrix}$ Klasse durch eine $\begin{matrix}\text{gerade}\\\text{ungerade}\end{matrix}$ Anzahl von Vertauschungen von jedesmal nur zwei Elementen aus der gegebenen Complexion ableiten.

Hat man daher die Permutationen in der Ordnung aufgeschrieben, daß jede folgende aus der nächst vorhergehenden durch Vertauschung von nur zwei Elementen entsteht, so gehören dieselben abwechselnd in verschiedene Klassen und sind somit auch abwechselnd mit verschiedenen Vorzeichen zu versehen, wobei die erste Complexion als positiv anzusehen ist.

§. 136. Determinante eines Systems von n^2 Elementen.

1) Wenn m Horizontalreihen (Zeilen) von je n Elementen, oder von der anderen Seite betrachtet, n Vertikalreihen (Colonnen) von je m Elementen zu unterscheiden sind, so wendet man zur Bezeichnung am vortheilhaftesten zwei Indices oder Numern an und versteht unter $a_{i,k}$ ein Element, dessen erster Index i die Horizontalreihe, dessen zweiter Index k dagegen die Stelle des Elementes in der betreffenden Horizontalreihe oder die Vertikalreihe angibt.

Für sämmtliche mn Elemente hat man hiernach:

$$\begin{matrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \ldots a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \ldots a_{2,n} \\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \ldots a_{3,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\
a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & a_{m,4} \ldots a_{m,n}
\end{matrix}$$

Ist $m = n$, so heißt die Reihe der Elemente $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,3}$, ... $a_{n,n}$, welche in der Diagonale des durch die n^2 Elemente gebildeten Quadrats stehen, die Diagonale des Quadrats jener n^2 Elemente.

2) Unter der Determinante des Systems von n^2 Elementen, welche in n Horizontalreihen von je n Elementen stehen, versteht man das Aggregat der Produkte von je n Elementen, welche sämmtlich verschiedenen Horizontalreihen und verschiedenen Vertikalreihen angehören.

Das Produkt der in der Diagonale stehenden Elemente bildet hierbei das Anfangsglied. Um aus diesem Gliede

$$a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}\ a_{4,4}\ \ldots\ a_{n,n}$$

die Determinante zu entwickeln, lasse man die Zeiger der Vertikalreihen unverändert, permutire aber die Zeiger der Horizontalreihen und sehe hierbei die einzelnen Glieder als positiv oder negativ an, je nachdem die Anzahl ihrer Inversionen gerade oder ungerade ist (§. 134 2). Das erste Glied der Determinante ist hiernach stets positiv, da sämmtliche Indices steigend geordnet erscheinen.

Anmerkung. Die Bildung der Permutationen geschieht hierbei am zweckmäßigsten nach §. 4, weil alsdann nach §. 135. Zus. 1. die aufeinander folgenden Glieder der Determinante abwechsend positiv und negativ sind.

3) Die Determinante von n^2 Elementen heißt nter Ordnung, weil deren Glieder durch Produkte von n Faktoren gebildet werden. Nach §. 5 besteht dieselbe aus n! Gliedern, welche nach §. 134 d. zur Hälfte positiv, zur Hälfte negativ sind.

4) Zur Bezeichnung der Determinante schreibt man das System der Elemente zwischen zwei Vertikalstriche, also:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \ldots & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (1).$$

Kürzer bezeichnet man dieselbe auch durch:

$$\Sigma \pm a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}\ \ldots\ a_{n,n},$$

oder allgemeiner durch

$$\Sigma \pm a_{1,p}\ a_{2,q}\ a_{3,r}\ a_{4,s}\ \ldots$$

wo sich die Summation auf alle Permutationen p q r s ... der Zahlen 1, 2, 3, ... n bezieht und das Zeichen nach Obigem zu bestimmen ist.

5) Läßt man aus der Determinante (1) der nten Ordnung irgend eine Horizontal- und irgend eine Vertikalreihe weg, so erhält man eine Determinante (n — 1)ter Ordnung, welche in Bezug auf die ihr zu Grunde liegende Determinante (1) insbesondere auch eine **Unterdeterminante** von jener heißt. Läßt man in der Determinante (1) x Horizontal- und x Vertikalreihen weg, so erhält man eine **Unterdeterminante der (n — x)ten Ordnung** von (1).

Beispiele.

1) $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}\ a_{2,2} - a_{2,1}\ a_{1,2}$

2) $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3} - a_{1,1}\ a_{3,2}\ a_{2,3} + a_{2,1}\ a_{3,2}\ a_{1,3} \\ - a_{2,1}\ a_{1,2}\ a_{3,3} + a_{3,1}\ a_{1,2}\ a_{2,3} - a_{3,1}\ a_{2,2}\ a_{1,3} \end{cases}$

3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1\ b_2 - a_2\ b_1$

4) $\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 8.3 - 2.5 = 24 - 10 = 14$

5) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} a_1\ b_2\ c_3 - a_1\ b_3\ c_2 + a_2\ b_3\ c_1 - a_2\ b_1\ c_3 \\ + a_3\ b_1\ c_2 - a_3\ b_2\ c_1. \end{cases}$

6) Ist die Determinante nter Ordnung auf die oben in 2 gelehrte Weise aus dem Anfangsgliede gebildet, indem man die ersten Indices permutirt, so kann man, da die Ordnung der Faktoren willkürlich ist, die Elemente eines jeden Gliedes auch nach den Zeigern der Horizontalreihen ordnen.

So ist z. B. nach vorstehendem Beispiele (2) auch:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3} - a_{1,1}\ a_{2,3}\ a_{3,2} + a_{1,3}\ a_{2,1}\ a_{3,2} \\ - a_{1,2}\ a_{2,1}\ a_{3,3} + a_{1,2}\ a_{2,3}\ a_{3,1} - a_{1,3}\ a_{2,2}\ a_{3,1}. \end{cases}$$

Man ersieht hieraus, daß in vorliegendem Falle die Determinante auch dadurch gebildet werden kann, daß man die zweiten Indices permutirt und die ersten unverändert läßt und die Zeichen hierbei nach der Anzahl der entsprechenden Inversionen bestimmt.

Um die Richtigkeit dieses Ausspruches allgemein zu beweisen, sei
$$a_{\alpha,1}\ a_{\beta,2}\ a_{\gamma,3}\ a_{\delta,4}\ a_{\varepsilon,5}\ \ldots$$
ein Glied der ersten Anordnung, $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \ldots$ also eine Permutationsform der Elemente 1, 2, 3, 4, ...,
dagegen
$$a_{1,\alpha'}\ a_{2,\beta'}\ a_{3,\gamma'}\ a_{4,\delta'}\ a_{5,\varepsilon'}\ \ldots$$
ein Glied der zweiten Anordnung.

Ohne Rücksicht auf das Zeichen liefert aber jedes Glied der ersten Anordnung, wenn solches nach den zweiten Indices geordnet wird, ein Glied der zweiten Anordnung und da zwei verschiedene der n! Glieder jener Anordnung auch zwei verschiedene Glieder der zweiten Anordnung bestimmen*), so erhält man auf diese Weise die möglichen n! Glieder dieser letzteren Anordnung, wenn zunächst auf das Zeichen keine Rücksicht genommen wird.

Um nun noch nachzuweisen, daß die beiden Anordnungen auch bezüglich der Zeichen übereinstimmen, sei
$$\ldots\ a_{x,p}\ \ldots\ a_{y,q}\ \ldots \quad \text{wo } q > p$$
ein Glied der ersten Anordnung $a_{\alpha,1}\ a_{\beta,2}\ \ldots$, in welcher $a_{x,p}$ $a_{y,q}$ eine Inversion bildet, also $x > y$ ist. Wird dieses Glied nach der zweiten Anordnung $a_{1,\alpha'}\ a_{2,\beta'}\ \ldots$ geordnet, so folgt:
$$\ldots\ a_{y,q}\ \ldots\ a_{x,p}\ \ldots$$
und da $q > p$, so bilden die zwei Elemente $a_{y,q}$ und $a_{x,p}$ eine Inversion.

Ist in der ersten Anordnung $x < y$, bilden also daselbst die Elemente $a_{x,p}$ $a_{y,q}$ keine Inversion, so erhält man
$$\ldots\ a_{x,p}\ \ldots\ a_{y,q}\ \ldots$$

---

*) Denn sind $a_{\alpha,1}\ a_{\beta,2}\ a_{\gamma,3}\ a_{\delta,4}\ a_{\varepsilon,5}$
und $a_{\alpha',1}\ a_{\beta',2}\ a_{\gamma',3}\ a_{\delta',4}\ a_{\varepsilon',5}$
zwei verschiedene Glieder der ersten Anordnung, so kann zunächst nicht gleichzeitig
$$\alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma',\ \ldots$$
sein, weil sonst die beiden Glieder identisch wären.

Es sei nun δ nicht gleich δ', also etwa $\delta = 3$, $\delta' = 5$. Ordnet man nun die Elemente nach den ersten Indices, so resultirt:
$$a_{1,p}\ a_{2,q}\ a_{\delta,4}\ a_{4,s}\ a_{5,t}$$
und
$$a_{1,p'}\ a_{2,q'}\ a_{3,r'}\ a_{4,s'}\ a_{\delta',4}.$$
Wären aber diese Glieder identisch, so müßte
$$p = p',\ q = q',\ 4 = r',\ s = s',\ t = 4$$
sein, und es kämen alsdann in jedem Gliede zwei Elemente aus der vierten Vertikalreihe vor, was nicht stattfinden kann.

als entsprechendes Glied der zweiten Anordnung, worin die Elemente $a_{x,p}$ $a_{y,q}$ ebenfalls keine Inversion bilden. Die zweite Anordnung enthält somit genau ebenso viele Inversionen als die erste und jedes Glied von jener findet sich mit demselben Zeichen in dieser vor.

Sind z. B. $a_{4,1}\ a_{1,2}\ a_{5,3}\ a_{3,4}\ a_{2,5}$
und $a_{1,2}\ a_{2,5}\ a_{3,4}\ a_{4,1}\ a_{5,3}$
zwei entsprechende Glieder beider Anordnungen, so erhält man im ersten Falle die 6 Inversionen: 41, 43, 42, 53, 52, 32 und im zweiten Falle: 21, 54, 51, 53, 41, 43, also ebenfalls 6.

Anmerkung. Vorstehender Satz kann durch die Gleichung
$$\Sigma(-1)^{\varepsilon}\ a_{p,1}\ a_{q,2}\ a_{r,3}\ \ldots = \Sigma(-1)^{\varepsilon}\ a_{1,p}\ a_{2,q}\ a_{3,r}\ \ldots$$
ausgedrückt werden, wenn ε die Anzahl der Inversionen der Permutationsform p q r . . . der Elemente 1, 2, 3, . . . n bezeichnet und die Summation sich stets auf alle Permutationen der n Elemente bezieht.

§. 137. Lehrsatz.

Stimmen in zwei Systemen die Horizontalreihen des einen mit den Vertikalreihen des anderen überein, so entsprechen beiden Systemen einerlei Determinante.

Beweis.

Sind

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \ldots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & \ldots & a_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

die beiden Systeme, so ersehen wir hieraus sofort, daß wenn $a_{i,k}$ ein Glied des ersten Systems ist, das entsprechende Glied des zweiten Systems $a_{k,i}$ heißen muß.

Bezeichnet nun
$$a_{1,p}\ a_{2,q}\ a_{3,r}\ a_{4,s}\ \ldots\ a_{n,u}$$
ein Glied der Determinante des ersten Systems, so kann nach §. 136 4. die Determinante dieses Systems allgemein ausgedrückt werden durch:
$$\Sigma \pm a_{1,p}\ a_{2,q}\ a_{3,r}\ a_{4,s}\ \ldots\ a_{n,u}.$$
Jenem Gliede der Determinante des ersten Systems entspricht aber das Glied
$$a_{p,1}\ a_{q,2}\ a_{r,3}\ a_{s,4}\ \ldots\ a_{u,n}.$$

mit demselben Zeichen der Determinante des zweiten Systems und diese kann somit auch dargestellt werden durch

$$\Sigma \pm a_{p,1}\ a_{q,2}\ a_{r,3}\ a_{s,4}\ \ldots\ a_{u,n}$$

wo die Summation den gleichen Umfang hat, wie vorhin.

Nach der Anmerkung zu §. 136 6. ist aber

$$\Sigma \pm a_{1,p}\ a_{2,q}\ a_{3,r}\ \ldots = \Sigma \pm a_{p,1}\ a_{q,2}\ a_{r,3}\ \ldots$$

wodurch der Satz bewiesen ist.

§. 138. Lehrsatz.

Vertauscht man irgend zwei Horizontalreihen oder irgend zwei Vertikalreihen eines Systems mit einander, so nimmt die betreffende Determinante den entgegengesetzten Werth an.

Beweis.

Sind die gte und die hte Horizontalreihe die beiden zu vertauschenden, so ist zu zeigen, daß

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{g,1} & a_{g,2} & a_{g,3} & \ldots & a_{g,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{h,1} & a_{h,2} & a_{h,3} & \ldots & a_{h,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{h,1} & a_{h,2} & a_{h,3} & \ldots & a_{h,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{g,1} & a_{g,2} & a_{g,3} & \ldots & a_{g,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Aus beiden Systemen ergibt sich sofort, daß $a_{i,k}$ und $a_{i,k}$ entsprechende Glieder derselben sind, wenn i nicht in einen der Werthe g oder h übergeht; ist aber $i = g$ oder $i = h$, so entsprechen den Gliedern $a_{g,k}$ und $a_{h,k}$ des ersten Systems die Glieder $a_{h,k}$ und $a_{g,k}$ des zweiten Systems.

Bezeichnet nun R die Determinante des ersten, R′ die des zweiten Systems und ist (h > g vorausgesetzt)

$$\pm\ a_{1,p}\ a_{2,q}\ a_{3,r} \ldots a_{g,x} \ldots a_{h,y} \ldots = G$$
$$\mp\ a_{1,p}\ a_{2,q}\ a_{3,r} \ldots a_{g,y} \ldots a_{h,x} \ldots = H$$

ein Gliederpaar von R, so haben G und H verschiedene Zeichen, weil das eine aus dem anderen Gliede durch Vertauschung von nur 2 Indices hervorgeht, und R kann als Summe von solchen Gliederpaaren aufgefaßt werden. Die analog gebildeten Glieder von R′ sind alsdann:

$$\pm\ a_{1,p}\ a_{2,q}\ a_{3,r} \ldots a_{h,x} \ldots a_{g,y} \ldots = G'$$
$$\mp\ a_{1,p}\ a_{2,q}\ a_{3,r} \ldots a_{h,y} \ldots a_{g,x} \ldots = H'$$

oder

$$\pm\ a_{1,p}\ a_{2,q}\ a_{3,r} \ldots a_{g,y} \ldots a_{h,x} \ldots = G'$$
$$\mp\ a_{1,p}\ a_{2,q}\ a_{3,r} \ldots a_{g,x} \ldots a_{h,y} \ldots = H'.$$

Es ist daher

$$G' = -H \text{ und } H' = -G;$$

also

$$R = \Sigma\,(G + H),$$
$$R' = \Sigma\,(G' + H') = -\Sigma\,(G + H)$$

und somit

$$R' = -R.$$

Ebenso ist

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \ldots & a_{1,g} \ldots & a_{1,h} \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \ldots & a_{2,g} \ldots & a_{2,h} \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \ldots & a_{3,g} \ldots & a_{3,h} \ldots & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} \ldots & a_{n,g} \ldots & a_{n,h} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \ldots & a_{1,h} \ldots & a_{1,g} \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \ldots & a_{2,h} \ldots & a_{2,g} \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \ldots & a_{3,h} \ldots & a_{3,g} \ldots & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} \ldots & a_{n,h} \ldots & a_{n,g} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Denn läßt man die Horizontalreihen in Vertikalreihen übergehen, so verwandeln sich beide Systeme nach §. 137 bezüglich in

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \ldots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & \ldots & a_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,g} & a_{2,g} & a_{3,g} & \ldots & a_{n,g} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,h} & a_{2,h} & a_{3,h} & \ldots & a_{n,h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \text{ und } - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \ldots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & \ldots & a_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,h} & a_{2,h} & a_{3,h} & \ldots & a_{n,h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,g} & a_{2,g} & a_{3,g} & \ldots & a_{n,g} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

welche nach dem oben Vorgetragenen einander gleich sind.

§. 139. Lehrsatz.

Die Determinante nimmt den Werth Null an,

wenn zwei Horizontalreihen oder zwei Vertikalreihen des Systems identisch sind.

Beweis.

Ist R die Determinante, so ist nach §. 138 R' = — R die Determinante, welche erhalten wird, wenn man die beiden identischen Reihen vertauscht. Da aber durch diese Vertauschung in dem Systeme keinerlei Veränderung hervorgebracht wird, so ist

$$R = -R$$

also

$$R = 0$$

für beliebige Werthe der Elemente.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

§. 140. Lehrsatz.

Wenn in irgend einer Horizontal- oder Vertikalreihe nur ein Element von Null verschieden ist, so reducirt sich die Determinante des gegebenen Systems auf das Produkt jenes Elementes mit einer Determinante der nächst niedrigeren Ordnung.

Beweis.

Es sei

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,k} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,k} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,k} & \dots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,k} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

und in der iten Horizontalreihe nur das Element $a_{i,k}$ von Null

verschieden. Setzt man nun diese Reihe als die erste Horizontalreihe, so tritt dadurch an die Stelle der

1ten, 2ten, 3ten, ... (i—1)ten, iten, (i+1)ten, (i+2)ten
die ite, 1te, 2te, ... (i—2)te, (i—1)te, (i+1)te, (i+2)te...
Horizontalreihe des ursprünglichen Systems. Da diese Anordnung aus jener durch (i—1)malige cyclische Versetzung erhalten wird und bei jeder Vertauschung von zwei Horizontalreihen eine Zeichenänderung eintritt, so folgt:

$$R = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,k-1} & a_{i,k} & a_{i,k+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Setzt man nun hierin die kte Vertikalreihe als erste, so tritt dadurch an die Stelle der

1ten, 2ten ... (k—1)ten, kten, (k+1)ten ...
die kte, 1te ... (k—2)te, (k—1)te, (k+1)te ...
Vertikalreihe und analog wie vorhin ergibt sich wegen der (k—1)maligen cyclischen Vertauschung unter Berücksichtigung, daß $(-1)^{i+k-2} = (-1)^{i+k}$ ist:

$$R = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{i,k} & a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,k-1} & a_{i,k+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{1,k} & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,k} & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,k} & a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,k} & a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,k} & a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad ..(1).$$

Sind daher alle Glieder der iten Horizontalreihe Null, mit Ausnahme des Gliedes $a_{i,k}$, so kann die Determinante immer auf eine andere reducirt werden, in welcher alle Glieder der ersten Horizontalreihe mit Ausnahme des ersten Gliedes Null sind. Für diesen Fall läßt sich aber unser Satz leicht beweisen.

Setzt man nach §. 136 4) $R = \Sigma (-1)^\varepsilon \, a_{1,x} \, a_{2,y} \, a_{3,z} \ldots a_{n,u}$ wo ε die Anzahl der Inversionen der Permutation $x, y, z \ldots u$ der Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ bedeutet, und berücksichtigt, daß $a_{1,x} = 0$ für alle Werthe von x mit alleiniger Ausnahme von $x = 1$ ist, so resultirt:

$$R = \Sigma (-1)^\varepsilon \, a_{1,1} \, a_{2,y} \, a_{3,z} \ldots a_{n,u}$$

wo nun $1, y, z, \ldots u$ eine Permutationsform von $1, 2, 3, \ldots n$ und ε die Anzahl der Inversionen der Permutation $1, y, z, \ldots u$ bedeutet. Weil 1 mit $y, z, \ldots u$ keine Inversion bildet, so kann man auch schreiben:

$$R = a_{1,1} \, \Sigma (-1)^\varepsilon \, a_{2,y} \, a_{3,z} \ldots a_{n,u}$$

wo ε die Anzahl der Inversionen der Permutation $y, z, \ldots u$, der Zahlen $2, 3, \ldots n$ bezeichnet.

Nun stimmen aber $y, z, \ldots u$, abgesehen von der Ordnung, mit den Zahlen $2, 3, 4, \ldots n$ überein, also stimmen auch $y - 1, z - 1, \ldots u - 1$, abgesehen von der Ordnung, mit $1, 2, 3, \ldots n - 1$ überein, oder $y - 1, z - 1, \ldots u - 1$ ist eine Permutation von $1, 2, 3, \ldots n - 1$ und da aus $y - 1 > z - 1$ unmittelbar $y > z$ folgt, so ist ε auch die Anzahl der Inversionen der Permutation $y - 1, z - 1, \ldots u - 1$ von $1, 2, 3, \ldots n - 1$. Setzt man nun $a_{p,q} = b_{p-1,q-1}$, oder was damit gleichbedeutend ist, sieht man die zweite Horizontalreihe und zweite Vertikalreihe als erste Reihen an, so ist:

$$R = a_{1,1} \, \Sigma (-1)^\varepsilon \, b_{1,y-1} \, b_{2,z-1} \ldots b_{n-1,u-1},$$

wo also $y - 1, z - 1, \ldots u - 1$ eine beliebige Permutation von $1, 2, 3, \ldots n - 1$ und ε die Anzahl der Inversionen bedeutet. Man darf daher auch schreiben:

$$R = a_{1,1} \, \Sigma (-1)^\varepsilon \, b_{1,p} \, b_{2,q} \ldots b_{n-1,s}$$

wo nun $p, q, \ldots s$ eine beliebige Permutation von $1, 2, 3, \ldots n - 1$ und ε die Anzahl der Inversionen ist, also

$$R = a_{1,1} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \ldots & b_{1,n-1} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \ldots & b_{2,n-1} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \ldots & b_{3,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \ldots & b_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

oder da $a_{p,q} = b_{p-1,q-1}$ ist, auch:

$$R = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \dots & a_{3,n} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \dots & a_{4,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Die Determinante ist daher gleich dem Produkte des ersten Elementes $a_{1,1}$ in eine andere Determinante, welche erhalten wird, wenn man die erste Horizontalreihe und die erste Vertikalreihe streicht.

Durch Anwendung dieses Resultates erhalten wir aus (1):

$$R = (-1)^{i+k} a_{i,k} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,2} & \dots & a_{1,k-1} & \dots & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,2} & \dots & a_{2,k-1} & \dots & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,k-1} & & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,k-1} & & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,2} & \dots & a_{n,k-1} & \cdot & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Wenn also in der iten Horizontalreihe alle Glieder mit Ausnahme von $a_{i,k}$ Null sind, so ist die Determinante gleich dem Produkte aus $(-1)^{i+k}$ in jenes Glied und eine Determinante, welche erhalten wird, wenn man die ite Horizontalreihe und die kte Vertikalreihe wegläßt.

Sind alle Glieder der kten Vertikalreihe, mit Ausnahme von $a_{i,k}$, gleich Null, so schreibe man:

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{3,k-1} & a_{3,k} & a_{3,k+1} & \dots & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,k-1} & a_{i,k} & a_{i,k+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & a_{n,k-1} & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

und mache nun die Horizontalreihen zu Vertikalreihen. Man erhält alsdann:

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \dots & a_{i-1,1} & a_{i,1} & a_{i+1,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & \dots & a_{i-1,2} & a_{i,2} & a_{i+1,2} & \dots & a_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,k-1} & a_{2,k-1} & a_{3,k-1} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i,k-1} & a_{i+1,k-1} & \dots & a_{n,k-1} \\ a_{1,k} & a_{2,k} & a_{3,k} & \dots & a_{i-1,k} & a_{i,k} & a_{i+1,k} & \dots & a_{n,k} \\ a_{1,k+1} & a_{2,k+1} & a_{3,k+1} & \dots & a_{i-1,k+1} & a_{i,k+1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{n,k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \dots & a_{i-1,n} & a_{i,n} & a_{i+1,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

und da nun alle Glieder der kten Horizontalreihe mit Ausnahme von $a_{i,k}$ gleich Null sind, so folgt hieraus nach Obigem:

$$R = (-1)^{i+k} a_{i,k} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \dots & a_{i-1,1} & a_{i+1,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & \dots & a_{i-1,2} & a_{i+1,2} & \dots & a_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,k-1} & a_{2,k-1} & a_{3,k-1} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i+1,k-1} & \dots & a_{n,k-1} \\ a_{1,k+1} & a_{2,k+1} & a_{3,k+1} & \dots & a_{i-1,k+1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{n,k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \dots & a_{i-1,n} & a_{i+1,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

oder wenn man die Vertikalreihen zu Horizontalreihen macht:

$$R = (-1)^{i+k} a_{i,k} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,k-1} & a_{3,k+1} & \dots & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Der Satz gilt somit auch, wenn alle Glieder bis auf eines einer Vertikalreihe Null sind.

Beispiele.

1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ $(i = 3,\ k = 1)$

2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ $(i = 2,\ k = 1)$

$$3)\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (i = 1,\ k = 1),$$

$$4)\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (i = 1,\ k = 2),$$

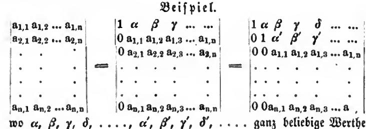
$$5)\ \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad (i = 1,\ k = 1),$$

$$6)\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & b_2 & 0 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad (i = 3,\ k = 3).$$

Zusatz.

Aus vorstehendem Satze ergibt sich unmittelbar, daß umgekehrt jede Determinante als eine solche von höherer Ordnung dargestellt werden kann.

Beispiel.



$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma & \dots & \dots \\ 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \alpha' & \beta' & \gamma' & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a \end{vmatrix},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \alpha', \beta', \gamma', \delta', \dots$ ganz beliebige Werthe bezeichnen.

§. 141. Lehrsatz.

Sind sämmtliche Elemente, welche sich auf einerlei Seite der Diagonalreihe eines Systems befinden, Null, so reducirt sich die Determinante dieses Systems auf ihr Anfangsglied.

Beweis.

Um zu zeigen, daß

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}\ \dots\ a_{n,n}$$

setzen wir allgemein:

$$a_{l,1} = a_{l,2} = a_{l,3} = \ldots\ldots = a_{l,l-1} = 0.$$

Soll nun das allgemeine Glied der Determinante

$$a_{1,p}\ a_{2,q}\ a_{3,r}\ a_{4,s}\ \ldots\ldots\ a_{n-1,x}\ a_{n,y}$$

wo $pqr \ldots xy$ eine Permutationsform von $1, 2, 3, \ldots n$ ist, nicht verschwinden, so kann nur

$$p \geq 1,\ q \geq 2,\ r \geq 3,\ s \geq 4,\ \ldots\ldots\ y = n \ldots.\ (\alpha)$$

sein. Setzen wir aber $p > 1$ voraus, so müßte irgend eine der Zahlen $q, r, s, \ldots\ldots x, y$ gleich 1 sein, was einer der Bedingungen (α) widersprechen würde. Ebenso kann nicht $q > 2$ sein, weil sonst einer der Indices $r, s, \ldots\ldots x, y$ gleich 2 sein müßte, was wiederum den Bedingungen (α) widersprechen würde. Da in analoger Weise gefolgert werden kann, daß nicht $r > 3$ u. s. f. sein kann, so ist also:

$$p = 1,\ q = 2,\ r = 3,\ \ldots\ y = n$$

und $a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}\ \ldots\ a_{n,n}$

das einzige nicht verschwindende Glied der Determinante.

Anmerkung. Die Richtigkeit des vorstehenden Satzes ergibt sich auch durch wiederholte Anwendung des §. 140. Zur Erläuterung dienen nachstehende Beispiele.

$$1)\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ 0 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 d_4.$$

$$2)\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & 0 & e_5 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \begin{vmatrix} c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & e_5 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 \begin{vmatrix} d_4 & e_4 \\ 0 & e_5 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 d_4 e_5.$$

§. 142. Bestimmung des Coefficienten $\alpha_{i,k}$ des Elementes $a_{i,k}$ in der Determinante $R = \Sigma \pm a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}\ \ldots\ldots\ a_{n,n}$.

Bildet man die Determinante durch Permutation der Indices der Verticalreihen, so enthält jedes Glied derselben eines der Elemente der iten Horizontalreihe:

$$a_{i,1},\ a_{i,2},\ a_{i,3},\ \ldots\ a_{i,k},\ \ldots\ a_{i,n}\ \ldots\ldots\ (1)$$

und wenn man die Determinante nach dieser ordnet, so nimmt dieselbe die Form an:

$$a_{i,1}\ \alpha_{i,1} + a_{i,2}\ \alpha_{i,2} + \ldots + a_{i,k}\ \alpha_{i,k} + \ldots\ a_{i,n}\ \alpha_{i,n} \ldots (2)$$

Um nun allgemein den Coefficienten $\alpha_{i,k}$ des Elementes $a_{i,k}$ zu bestimmen, berücksichtige man, daß in den Coefficienten

$$\alpha_{i,1},\ \alpha_{i,2},\ \ldots\ \alpha_{i,k},\ \ldots\ \alpha_{i,n}$$

keines der Elemente (1) vorkommt, dieselben also unverändert bleiben, wenn man an die Elemente der iten Horizontalreihe besondere Bedingungen knüpft und daß ferner $\alpha_{i,k}$ kein Glied der kten Vertikalreihe enthält. Setzt man deshalb $a_{i,k} = 1$ und alle anderen Elemente der iten Horizontalreihe Null*), so resultirt:

$$\alpha_{i,k} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,k-1} & a_{2,k} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,k-1} & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Dieser Coefficient läßt sich aber als Unterdeterminante der (n—1)ten Ordnung darstellen, indem man zunächst die ite Horizontalreihe zur ersten Horizontalreihe, darnach die kte Vertikalreihe zur ersten Vertikalreihe macht und auf das erhaltene System §. 140 anwendet. Man erhält:

$$\alpha_{i,k} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad (3)$$

Ordnet man also die Determinante in der durch (2) ausgedrückten Weise, so ist der Coefficient des Gliedes $a_{i,k}$ eine Determinante der (n—1)ten Ordnung, bestehend aus den Elementen, welche übrig bleiben, wenn man in dem ursprünglichen Systeme von R die ite Horizontalreihe und die kte Vertikalreihe wegläßt.

*) Man könnte auch die übrigen Elemente der kten Vertikalreihe Null setzen.

Beispiele.

1) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} z & a & b \\ c & z & d \\ e & f & z \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} z & d \\ f & z \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & b \\ f & z \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & b \\ z & d \end{vmatrix}$$

$$= z\,(z^2 - df) - c\,(az - bf) + e\,(ad - bz)$$
$$= z^3 - z\,(ac + be + df) + bcf + ade.$$

3) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} 0 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^3 + a_2^3$$

4) $$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a\,(a^2 - 1) - (a - 1) + (1 - a)$$
$$= (a - 1)^2\,(a + 2)$$

5) $$\begin{vmatrix} 14 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 11 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 14 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 11 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 14\,.\,23 - 5\,.\,9 + 11\,.\,-1 = 266.$$

6) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \left[\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right]$$

$$+ 4 \left[\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \right] - 3 \left[\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \right]$$

$$= 3.7 + 13 + 5.2 - 2\,(7 + 3 + 5) + 4\,(13 - 3.3 + 5) - 3\,(2 - 3 - 1)$$
$$= 44 - 30 + 36 + 6 = 56.$$

§. 143. Lehrsatz.

Um eine Determinante mit einem Faktor zu multipliciren, kann man sämmtliche Elemente einer Horizontal- oder einer Verticalreihe des betreffenden Systems damit multipliciren.

Beweis.

Ist
$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$
so kann man nach §. 142 schreiben:
$$R = a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 + \dots$$
wo α_1, β_1, γ_1, ... keine Elemente der ersten Horizontalreihe enthalten und erhält somit:
$$\begin{vmatrix} pa_1 & pb_1 & pc_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = pa_1\alpha_1 + pb_1\beta_1 + pc_1\gamma_1 + \dots .$$
$$= p(a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + \dots) = pR = p\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$
Ebenso kann man setzen:
$$R = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + \dots$$
wo φ_1, φ_2, φ_3, ... keine Elemente der ersten Vertikalreihe enthalten, und es ist daher:
$$\begin{vmatrix} pa_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ pa_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ pa_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = pa_1\varphi_1 + pa_2\varphi_2 + \dots = p(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots) = pR$$

Beispiel.

$$-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_1 & b_1 \\ -a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_1 & -b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Zusatz.

Enthalten sämmtliche Elemente einer Horizontal- oder einer Vertikalreihe einen gemeinschaftlichen Faktor, so kann dieser dem Systeme als Faktor vorangesetzt werden.

Beispiel.

$$1)\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$2)\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\, b_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & c_1 \\ 1 & 1 & c_2 \\ 1 & 1 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (nach §. 139)}$$

§. 144. Lehrsatz.

Sind die entsprechenden Elemente zweier Horizontal- oder zweier Vertikalreihen eines Systems proportional, so ist die Determinante identisch Null.

Beweis.

Nach §. 143 Zus. und §. 139 hat man:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & np & mp & e_1 \\ a_2 & b_2 & nq & mq & e_2 \\ a_3 & b_3 & nr & mr & e_3 \\ a_4 & b_4 & ns & ms & e_4 \\ a_5 & b_5 & nt & mt & e_5 \end{vmatrix} = mn \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p & p & e_1 \\ a_2 & b_2 & q & q & e_2 \\ a_3 & b_3 & r & r & e_3 \\ a_4 & b_4 & s & s & e_4 \\ a_5 & b_5 & t & t & e_5 \end{vmatrix} = 0$$

§. 145. Lehrsatz.

Sind sämmtliche Elemente einer Horizontal- oder einer Vertikalreihe eines Systemes Aggregate von m Gliedern, so läßt sich die entsprechende Determinante in ein Aggregat von m Determinanten auflösen.

Beweis.

Ist
$$\begin{aligned} a_{i,1} &= p_1 + q_1 + r_1 + \ldots \\ a_{i,2} &= p_2 + q_2 + r_2 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i,n} &= p_n + q_n + r_n + \ldots \end{aligned}$$

und man setzt:

$$R = a_{i,1}\ \alpha_{i,1} + a_{i,2}\ \alpha_{i,2} + \ldots + a_{i,n}\ \alpha_{i,n}$$

wo also $\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots \alpha_{i,n}$ keine Elemente der iten Horizontalreihe enthalten, so erhält man:

$$R = (p_1 + q_1 + r_1)\ \alpha_{i,1} + (p_2 + q_2 + r_2 + \ldots)\ \alpha_{i,2} + \ldots + (p_n + q_n + r_n + \ldots)\ \alpha_{i,n}$$

$$\begin{aligned} = p_1\,\alpha_{i,1} &+ p_2\,\alpha_{i,2} + \ldots + p_n\,\alpha_{i,n} + \\ q_1\,\alpha_{i,1} &+ q_2\,\alpha_{i,2} + \ldots + q_n\,\alpha_{i,n} + \\ r_1\,\alpha_{i,1} &+ r_2\,\alpha_{i,2} + \ldots + r_n\,\alpha_{i,n} + \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die einzelnen Reihen dieses Ausdruckes sind nun Determinanten, welche aus R entstehen, wenn man an die Stelle der iten Horizontalreihe

$$a_{i,1}\ a_{i,2}\ a_{i,3}\ \ldots\ a_{i,n}$$

bezüglich die Reihen

$$\begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \\ q_1 & q_2 & q_3 & \ldots \\ r_1 & r_2 & r_3 & \ldots \end{matrix}$$

setzt.

Beispiele.

1) $$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1+a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2+a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3+a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Zusätze.

1) **Der Werth einer Determinante wird nicht verändert, wenn man zu den Elementen einer Horizontal- oder einer Vertikalreihe die mit einem beliebigen constanten, positiven oder negativen Faktor multiplicirten Elemente einer Parallelreihe addirt.**

Beispiele.

1) $$\begin{vmatrix} a_1+b_1p & b_1 & c_1 \\ a_2+b_2p & b_2 & c_2 \\ a_8+b_3p & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1p & b_1 & c_1 \\ b_2p & b_2 & c_2 \\ b_3p & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+a_3k & b_2+b_3k & c_2+c_3k \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3k & b_3k & c_3k \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$3)\quad \begin{vmatrix} a_1 + b_1p + c_1q & b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2p + c_2q & b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3p + c_3q & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1p & b_1 & c_1 \\ b_2p & b_2 & c_2 \\ b_3p & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1q & b_1 & c_1 \\ c_2q & b_2 & c_2 \\ c_3q & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

2) **Geht eine Reihe einer Determinante aus den übrigen dadurch hervor, daß man diese mit bestimmten Coefficienten multiplicirt und darnach addirt, so ist die Determinante Null.**

Denn man hat z. B.

$$1)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1x + a_2y & b_1x + b_2y & c_1x + c_2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1x & b_1x & c_1x \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2y & b_2y & c_2y \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= x \,.\, 0 + y \,.\, 0 = 0.$$

$$2)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x \\ a_2 & b_2 & a_2x \\ a_3 & b_3 & a_3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1y \\ a_2 & b_2 & b_2y \\ a_3 & b_3 & b_3y \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} = x \,.\, 0 + y \,.\, 0 = 0.$$

3) Von vorstehenden Sätzen kann man mit Vortheil bei der Umwandlung gegebener Determinantensysteme und hiernach bei der Auffindung des Werthes der betreffenden Determinante Gebrauch machen. Zur Erläuterung des Verfahrens dienen nachstehende **Beispiele.**

$$1)\quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 - a & y_1 - b \\ 1 & x_2 - a & y_2 - b \\ 1 & x_3 - a & y_3 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 - b \\ 1 & x_2 & y_2 - b \\ 1 & x_3 & y_3 - b \end{vmatrix} {}^{*)} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} {}^{**)}$$

$$2)\quad \begin{vmatrix} x_1 - a & y_1 - b \\ x_2 - a & y_2 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - a & y_1 - b \\ 1 & x_2 - a & y_2 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a - a & b - b \\ 1 & x_1 - a & y_1 - b \\ 1 & x_2 - a & y_2 - b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & b - b \\ 1 & x_1 & y_1 - b \\ 1 & x_2 & y_2 - b \end{vmatrix} {}^{***)} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} {}^{\dagger)}$$

---

*) Wenn man zur 2ten Vert ikalr. die mit a multipl. 1te addirt.
**) " " " 3. " " " b " 1. "
***) " " " 2. " " " a " 1. "
†) " " " 3. " " " b " 1. "

$$3)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{*)} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{**)}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{***)} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{\dagger)} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{\dagger\dagger)}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}^{\dagger\dagger\dagger)} = 4 \,.\, -2 \,.\, 2 \,.\, -1 = 16.$$

4) Die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

in eine Determinante zweiter Ordnung zu verwandeln.

Auflösung.

Man hat nach §. 144 und obigem Zusatze:

$$Rb_1c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & b_1c_1 \\ a_2 & b_2c_1 & b_1c_2 \\ a_3 & b_3c_1 & b_1c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & 0 \\ a_2 & b_2c_1 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_3 & b_3c_1 & b_1c_3 - b_3c_1 \end{vmatrix}$$

$$Rb_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_3 & b_3 & b_1c_3 - b_3c_1 \end{vmatrix}$$

$$Rb_1a_1b_1 = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_1 & 0 \\ a_2b_1 & a_1b_2 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_3b_1 & a_1b_3 & b_1c_3 - b_3c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1b_1 & 0 & 0 \\ a_2b_1 & a_1b_2 - a_2b_1 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_3b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 & b_1c_3 - b_3c_1 \end{vmatrix}$$

$$Ra_1b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1b_2 - a_2b_1 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_3 & a_1b_3 - a_3b_1 & b_1c_3 - b_3c_1 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_1b_3 - a_3b_1 & b_1c_3 - b_3c_1 \end{vmatrix}^{*\dagger)}$$

$$R = \frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_1b_3 - a_3b_1 & b_1c_3 - b_3c_1 \end{vmatrix}$$

---

*) Wenn man zur 1. Vertikalr. die Summe der 2., 3. und 4. addirt.
**) " " " 1. Horizontalr. die Summe der 2., 3. und 4. addirt.
***) Durch Addition der 2. und 3. Vertikalreihe.
†) " " " 2. " 3. Horizontalreihe.
††) Durch Subtraktion der 4. Horizontalreihe von der 3.
†††) " " " 4. Vertikalreihe von der 3.
*†) Nach §. 140.

$$5)\quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \\ 1 & 6 & 21 & 56 \\ 1 & 7 & 28 & 84 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 21 \\ 0 & 1 & 7 & 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 15 \\ 1 & 6 & 21 \\ 1 & 7 & 28 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 1$$

$$6)\quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & e & e^2 & e^3 & e^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 & a^3-b^3 & a^4-b^4 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 & b^3-c^3 & b^4-c^4 \\ 0 & c-d & c^2-d^2 & c^3-d^3 & c^4-d^4 \\ 0 & d-e & d^2-e^2 & d^3-e^3 & d^4-e^4 \\ 1 & e & e^2 & e^3 & e^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & a^2-b^2 & a^3-b^3 & a^4-b^4 \\ b-c & b^2-c^2 & b^3-c^3 & b^4-c^4 \\ c-d & c^2-d^2 & c^3-d^3 & c^4-d^4 \\ d-e & d^2-e^2 & d^3-e^3 & d^4-e^4 \end{vmatrix}$$

oder wenn man das Produkt

$$(a-b)(b-c)(c-d)(d-e) = P_1$$

setzt

$$= P_1 \begin{vmatrix} 1 & a+b & a^2+ab+b^2 & a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\ 1 & b+c & b^2+bc+c^2 & b^3+b^2c+bc^2+c^3 \\ 1 & c+d & c^2+cd+d^2 & c^3+c^2d+cd^2+d^3 \\ 1 & d+e & d^2+de+e^2 & d^3+d^2e+de^2+e^3 \end{vmatrix}$$

$$= P_1 \begin{vmatrix} 0 & a-c & a^2-c^2+ab-bc & a^3+a^2b+ab^2-b^2c-bc^2-c^3 \\ 0 & b-d & b^2-d^2+bc-cd & b^3+b^2c+bc^2-c^2d-cd^2-d^3 \\ 0 & c-e & c^2-e^2+cd-de & c^3+c^2d+cd^2-d^2e-de^2-e^3 \\ 1 & d+e & d^2+de+e^2 & d^3+d^2e+de^2+e^3 \end{vmatrix}$$

$$= -P_1 \begin{vmatrix} a-c & a^2-c^2+ab-bc & a^3+a^2b+ab^2-b^2c-bc^2-c^3 \\ b-d & b^2-d^2+bc-cd & b^3+b^2c+bc^2-c^2d-cd^2-d^3 \\ c-e & c^2-e^2+cd-de & c^3+c^2d+cd^2-d^2e-de^2-e^3 \end{vmatrix}$$

oder wenn man $(a-c)(b-d)(c-e) = P_2$
setzt,

$$= -P_1 P_2 \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & a^2+ab+ac+b^2+bc+c^2 \\ 1 & b+c+d & b^2+bc+bd+c^2+cd+d^2 \\ 1 & c+e+d & c^2+cd+ce+d^2+de+e^2 \end{vmatrix}$$

$$= -P_1 P_2 \begin{vmatrix} 0 & a-d & a^2+ac+ab-bd-cd-d^2 \\ 0 & b-e & b^2+bd+bc-ce-de-e^2 \\ 1 & c+d+e & c^2+ce+e^2+dc+de+d^2 \end{vmatrix}$$

$$= -P_1 P_2 \begin{vmatrix} a-d & a^2+ac+ab-bd-cd-d^2 \\ b-e & b^2+bd+bc-cc-de-e^2 \end{vmatrix}$$

oder $(a-d)(b-e) = P_3$
gesetzt,

$$= - P_1\ P_2\ P_3 \begin{vmatrix} 1 & a + b + c + d \\ 1 & b + c + d + e \end{vmatrix}$$

$$= - P_1\ P_2\ \dot{P}_3\ (e - a)$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(b-c)(b-d)(b-e)(c-d)(c-e)(d-e)$$

$$7) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + b + c + d & b & c & d \\ a + b + c + d & a & d & c \\ a + b + c + d & d & a & b \\ a + b + c + d & c & b & a \end{vmatrix} {}^{*)}$$

oder wenn man

$$a + b + c + d = S_1$$

setzt,

$$= S_1 \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & d & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix} = S_1 \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a+b-c-d & d+c-a-b & c+d-a-b \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix} {}^{**)}$$

oder wenn man die Zeichen der 2ten Vertikalreihe ändert und

$$c + d - a - b = S_2$$

setzt,

$$= - S_1\ S_2 \begin{vmatrix} 1 & -b & c & d \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -d & a & b \\ 1 & -c & b & a \end{vmatrix} = - S_1 S_2 \begin{vmatrix} 1 & -b & c & d \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -d + c & a - b & b - a \\ 1 & -c & b & a \end{vmatrix} {}^{***)}$$

$$= - S_1\ S_2 \begin{vmatrix} 1 & -b & c & d \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & c - d & a - b & b - a \\ 0 & b - c & b - c & a - d \end{vmatrix} {}^{\dagger)} = - S_1 S_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c-d & a-b & b-a \\ b-c & b-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$= - S_1\ S_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ c-d & a-b-c+d & b-a \\ b-c & 0 & a-d \end{vmatrix} {}^{\dagger\dagger)}$$

$$= - S_1\ S_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c-d & a-b-c+d & -a+b-c+d \\ b-c & 0 & a-b+c-d \end{vmatrix} {}^{\dagger\dagger\dagger)}$$

$$= - S_1\ S_2 \begin{vmatrix} a-b-c+d & -a+b-c+d \\ 0 & a-b+c-d \end{vmatrix}$$

$$= - S_1 S_2 (a-b-c+d)\ (a-b+c-d)$$

$$= (a+b+c+d)\ (a+b-c-d)\ (a-b-c+d)\ (a-b+c-d).$$

---

*) Wenn man zur 1ten V. die 2te + 3te + 4te V. addirt.

**) Wenn man statt der 2ten H. die 2te + 1te — 3te — 4te H. setzt.

***) Wenn man statt der 3ten H. die 3te — 4te H. setzt.

†) „ „ „ „ 4ten „ „ 4te — 1te „ „.

††) Statt der 2ten V. die 2te — 1te V.

†††) „ „ 3ten V. „ 3te — 1te V.

§. 146. Auflösung eines Systems von Gleichungen des ersten Grades.

Setzt man, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

so folgt:

$$x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$y\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1x + b_1y + c_1z & c_1 \\ a_2 & a_2x + b_2y + c_2z & c_2 \\ a_3 & a_3x + b_3y + c_3z & c_3 \end{vmatrix}$$

$$z\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3z \end{vmatrix}$$

Sind nun die Werthe von x, y, z durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\alpha)$$

bestimmt, so hat man:

$$x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad y\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$z\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

woraus sich leicht die Werthe von x, y, z berechnen lassen.

Analog findet man aus den vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1t &= e_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t &= e_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3t &= e_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4t &= e_4 \end{aligned}$$

die Unbekannten durch die Gleichungen:

$$x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ e_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$y\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & e_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & e_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & e_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & e_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$z\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & e_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & e_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$t\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & e_4 \end{vmatrix}$$

In ähnlicher Weise gilt das Gesetz für ein System von n Gleichungen.

Um also ein geordnetes System von n Gleichungen des ersten Grades aufzulösen, berechne man zuerst die Determinante des Systems der n^2 Coefficienten der Glieder der linken Seite, alsdann die n Determinanten, welche man der Reihe nach erhält, wenn man statt der 1, 2, 3, ... nten Vertikalreihe der vorigen Determinante bezüglich die Vertikalreihe, welche durch die Glieder der rechten Seite der Gleichungen gebildet wird, einschaltet. Die n Quotienten aus jeder dieser n Determinanten durch jene liefern alsdann die Werthe der entsprechenden n Unbekannten.

Anmerkung. Die Determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ kann nach Vorstehendem auch als gemeinschaftlicher Nenner der sich für x, y, z aus den Gleichungen (α) ergebenden Werthe definirt werden.

Es läßt sich natürlich alsdann diese Definition auch auf n^2 Elemente ausdehnen.

Beispiele.

1) Sind

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 2 \\ 5x + 4y + 3z &= 60 \\ 2x + 3y - 9z &= -1 \end{aligned}$$

die gegebenen Gleichungen, so hat man:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 14 & -2 \\ 0 & 7 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & -2 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} = -140$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 60 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 54 & 10 & 0 \\ -1 & 3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 54 & 10 & 0 \\ 17 & -15 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 54 & 10 \\ 17 & -15 \end{vmatrix} = -980$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 60 & 3 \\ 2 & -1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 54 & 0 \\ 2 & -1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 54 & 0 \\ 11 & 17 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 54 \\ 11 & 17 \end{vmatrix} = -560$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & 60 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 60 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 125 & 184 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 125 & 184 \end{vmatrix} = -420.$$

Somit wird

$$x = \frac{-980}{-140} = 7;\; y = \frac{-560}{-140} = 4;\; z = \frac{-420}{-140} = 3.$$

2) Wenn

$$\begin{aligned} x + y + z + 2u &= 12 \\ 2x + 3y + 4z - 5u &= 28 \\ 4x + 5y - 2z + 3u &= 16 \\ 5x + 2y + 7z + 4u &= 55 \end{aligned}$$

das gegebene System von Gleichungen ist, so hat man:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\left[3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\right]$$

$$- 2\left[1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\right]$$

$$+ 4\left[1\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}\right]$$

$$- 5\left[1\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}\right]$$

$$= 1\,(-87 - 255 + 4) - 2\,(-29 + 50 + 14) + 4\,(51 + 30 - 26) - 5\,(2 - 21 - 65)$$

$$= -338 - (2.35) + (4.55) - (5.-84)$$

$$= -338 - 70 + 220 + 420 = 232.$$

$$\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 & 2 \\ 28 & 3 & 4 & -5 \\ 16 & 5 & -2 & 3 \\ 55 & 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = (12 \cdot -338) - (28 \cdot 35) + (16 \cdot 55) - (55 \cdot -84) = 464$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 2 \\ 2 & 28 & 4 & -5 \\ 4 & 16 & -2 & 3 \\ 5 & 55 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 28 & 4 & -5 \\ 16 & -2 & 3 \\ 55 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 12 & 1 & 2 \\ 16 & -2 & 3 \\ 55 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 12 & 1 & 2 \\ 28 & 4 & -5 \\ 55 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 12 & 1 & 2 \\ 28 & 4 & -5 \\ 16 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\left[28\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 16\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 55\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\right]$$

$$- 2\left[12\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 16\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 55\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\right]$$

$$+ 4\left[12\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 28\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 55\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}\right]$$

$$-5\left[12\begin{vmatrix}4&-5\\-2&3\end{vmatrix}-28\begin{vmatrix}1&2\\-2&3\end{vmatrix}+16\begin{vmatrix}1&2\\4&-5\end{vmatrix}\right]$$

$$=1(-812-816+110)-2(-348+160+385)$$
$$+4(612+280-715)-5(24-196-208)=696.$$

$$\begin{vmatrix}1&1&12&2\\2&3&28&-5\\4&5&16&3\\5&2&55&4\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}3&28&-5\\5&16&3\\2&55&4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&12&2\\5&16&3\\2&55&4\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}1&12&2\\3&28&-5\\2&55&4\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1&12&2\\3&28&-5\\5&16&3\end{vmatrix}$$

$$=1\left[3\begin{vmatrix}16&3\\55&4\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}28&-5\\55&4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}28&-5\\16&3\end{vmatrix}\right]$$

$$-2\left[1\begin{vmatrix}16&3\\55&4\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}12&2\\55&4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}12&2\\16&3\end{vmatrix}\right]$$

$$+4\left[1\begin{vmatrix}28&-5\\55&4\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}12&2\\55&4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}12&2\\28&-5\end{vmatrix}\right]$$

$$-5\left[1\begin{vmatrix}28&-5\\16&3\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}12&2\\16&3\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}12&2\\28&-5\end{vmatrix}\right]$$

$$=1(-303-1935+328)-2(-101+310+8)$$
$$+4(387+186-232)-5(164-12-580)=1160.$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&12\\2&3&4&28\\4&5&-2&16\\5&2&7&55\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}3&4&28\\5&-2&16\\2&7&55\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&1&12\\5&-2&16\\2&7&55\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}1&1&12\\3&4&28\\2&7&55\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1&1&12\\3&4&28\\5&-2&16\end{vmatrix}$$

$$=1\left[3\begin{vmatrix}-2&16\\7&55\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}4&28\\7&55\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}4&28\\-2&16\end{vmatrix}\right]$$

$$-2\left[1\begin{vmatrix}-2&16\\7&55\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1&12\\7&55\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&12\\-2&16\end{vmatrix}\right]$$

$$+4\left[1\begin{vmatrix}4&28\\7&55\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&12\\7&55\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&12\\4&28\end{vmatrix}\right]$$

$$-5\left[1\begin{vmatrix}4&28\\-2&16\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&12\\-2&16\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}1&12\\4&28\end{vmatrix}\right]$$

$$=1(-666-120+240)-2(-222+145+80)$$
$$+4(24+87-40)-5(120-120-100)=232.$$

Es ist daher:

$$x=\frac{464}{232}=2;\ y=\frac{696}{232}=3;\ z=\frac{1160}{232}=5;\ u=\frac{232}{232}=1.$$

§. 147. Aufgaben zur Uebung.

1) Die Inversionen anzugeben in den Permutationsformen:

a) $a_3\ a_1\ a_5\ a_2\ a_6\ a_4$. c) $a_4\ a_2\ a_3\ a_1\ a_6\ a_5$.

b) $a_3\ a_1\ a_4\ a_2\ a_6\ a_5$. d) $a_4\ a_6\ a_3\ a_1\ a_2\ a_5$.

2) Wie viele Inversionen enthalten die Permutationsformen:
a) $a_3\ a_2\ a_4\ a_1\ a_6\ a_8\ a_5\ a_7$. b) $a_7\ a_5\ a_3\ a_1\ a_2\ a_4\ a_6\ a_9\ a_8$.

3) Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}$$

durch Permutation α) der Horizontalzeiger; β) der Vertikalzeiger zu entwickeln.

4) Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

zu entwickeln.

5) Man soll nachweisen, daß man für die Permutationsform $a_{1,3}\ a_{2,4}\ a_{3,2}\ a_{4,1}$ einerlei Zeichen erhält, wenn man dieselbe aus $a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}\ a_{4,4}$ auf die beiden in Aufgabe 3. bezeichneten Arten herleitet.

6) Dasselbe für

α) $a_{1,4}\ a_{2,2}\ a_{3,5}\ a_{4,1}\ a_{5,3}$; β) $a_{1,3}\ a_{2,2}\ a_{3,1}\ a_{4,4}\ a_{5,6}\ a_{6,5}$.

7) Durch Entwickelung der Determinanten nachzuweisen, daß folgende Beziehungen stattfinden:

$$\alpha)\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\beta)\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\gamma)\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$\delta)\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

8) Durch Bildung der Determinanten nachzuweisen, daß

$$\alpha) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \beta) \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \delta) \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

9) Nachstehende Determinanten als Produkte eines Faktors mit einer Unterdeterminante der nächst niedrigeren Ordnung anzuschreiben:

$$\alpha) \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \beta) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad \delta) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon) \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 & d_1 \\ a_2 & 0 & c_2 & d_2 \\ a_3 & 0 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad \zeta) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 0 \end{vmatrix}$$

10) Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

auf die verschiedenen Arten als algebraische Summe von je 4 Produkten darzustellen, deren jedes eines der Elemente des Systems und eine Unterdeterminante der dritten Ordnung zu Faktoren hat. — Die Identität der gefundenen Summen ist durch Entwickelung nachzuweisen.

11) Nachstehende Determinanten zu berechnen:

$$1)\ \begin{vmatrix} z & a & a \\ b & z & a \\ b & b & z \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} z & a & a & a \\ b & z & a & a \\ b & b & z & a \\ b & b & b & z \end{vmatrix} \qquad 3)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & z & a \\ 1 & b & z \end{vmatrix}$$

$$4)\ \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ b_1 & 0 & c_2 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix} \qquad 5)\ \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ -b & 0 & c_2 \\ -c_1 & -c_2 & 0 \end{vmatrix} \qquad 6)\ \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ -b_1 & 0 & c_2 & d_2 \\ -c_1 & -c_2 & 0 & d_3 \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$7)\ \begin{vmatrix} z & a & a & a & a \\ b & z & a & a & a \\ b & b & z & a & a \\ b & b & b & z & a \\ b & b & b & b & z \end{vmatrix} \qquad 8)\ \begin{vmatrix} 0 & a & a & a & a & a \\ b & 0 & a & a & a & a \\ b & b & 0 & a & a & a \\ b & b & b & 0 & a & a \\ b & b & b & b & 0 & a \\ b & b & b & b & b & 0 \end{vmatrix} \qquad 9)\ \begin{vmatrix} z & a & b & c \\ a & z & d & f \\ -b & -d & z & g \\ -c & -f & -g & z \end{vmatrix}$$

$$10)\ \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ az & 0 & d & e \\ bz & dz & 0 & f \\ cz & ez & fz & 0 \end{vmatrix} \qquad 11)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \qquad 12)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$13)\ \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1\beta_1 & \beta_1^2 \\ \alpha_2^2 & \alpha_2\beta_2 & \beta_2^2 \\ \alpha_3^2 & \alpha_3\beta_3 & \beta_3^2 \end{vmatrix} \qquad 14)\ \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \qquad 15)\ \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$16)\ \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \qquad 17)\ \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \qquad 18)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$19)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a & a^2 & a^3 & 1 \end{vmatrix} \qquad 20)\ \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \\ 5 & 13 & 3 \end{vmatrix} \qquad 21)\ \begin{vmatrix} 1 & 14 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 11 & 5 \end{vmatrix}$$

$$22)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 5 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \qquad 23)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 31 & 0 \\ 1 & 2 & 21 & 1 \\ 4 & 0 & 46 & 2 \\ 0 & 3 & 45 & 4 \end{vmatrix} \qquad 24)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 & -9 \\ 5 & 7 & 18 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 11 \end{vmatrix}$$

25) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 11 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 8 & 1 \end{vmatrix}$ 26) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 \\ 1 & 7 & 28 & 84 & 210 \\ 1 & 8 & 36 & 120 & 330 \\ 1 & 9 & 45 & 165 & 495 \end{vmatrix}$

12) Man soll nachweisen, daß

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-a & y_1-b & z_1-c \\ x_2-a & y_2-b & z_2-c \\ x_3-a & y_3-b & z_3-c \end{vmatrix}$$

13) Nachstehende Systeme von Gleichungen mittelst Determinanten aufzulösen:

1) $\begin{aligned} 4x - 5y &= -1 \\ 3x - 2y &= 8. \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} 7x + 3y &= 62 \\ 5x - 7y &= 26. \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x + y + z &= 11 \\ 3x - 7y + 2z &= 9 \\ 5x - 12y + 3z &= 13. \end{aligned}$ 4) $\begin{aligned} x + y + z &= 14 \\ -2x + 3y + 2z &= 5 \\ 3x - 4y + 5z &= 11. \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 65 \\ 3x + 4y &= 62 \\ y - 3z &= -1. \end{aligned}$ 6) $\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 3x + 4y - 3z &= 5 \\ 5x + y + 4z &= 42. \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} x + y + z + u &= 22 \\ 3x + 5y + 2z + 4u &= 55 \\ 2x + 3y - 4z + 5u &= 14 \\ 5x - y + 3z - 2u &= 19. \end{aligned}$ 8) $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 31 \\ x + 2y + u &= 21 \\ 4x + 5z + 2u &= 46 \\ 3y + 5z + 4u &= 45. \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} x + 2y + 4z + 8u &= 12 \\ x + 3y + 9z + 27u &= 60 \\ x + 4y + 16z + 64u &= 24 \\ x + 5y + 25z + 125u &= 36. \end{aligned}$ 10) $\begin{aligned} x + y + z + u &= 1 \\ 2x + 3y + 4z + 5u &= -2 \\ 4x - y + 2z + 3u &= -2 \\ 3x + 5y - z + 2u &= 0. \end{aligned}$

Tabellen.

L. Tabelle über die Werthe von $\mathfrak{P}_n$ und $\Sigma\mathfrak{P}_n$ für p = 3.

n.	P_n.	$\log P_n$.	n log 1,03	$\log P_n$ — n log 1,03 = $\log \mathfrak{P}_n$.	$\mathfrak{P}_n$.	$\Sigma\mathfrak{P}_n$.
0	1000	3,0000000	0,0000000	3,0000000	1000,0000000	14660,0896465
1	750	2,8750613	0,0128372	2,8622241	728,1553333	13660,0896465
2	661	2,8202015	0,0256744	2,7945271	623,0560000	12931,9343132
3	618	2,7909885	0,0385116	2,7524769	565,5576512	12308,8783132
4	593	2,7730547	0,0513488	2,7217059	526,8729736	11743,3206620
5	579	2,7626786	0,0641860	2,6984926	499,4506923	11216,4476884
6	567	2,7535831	0,0770232	2,6765599	474,8537654	10716,9969961
7	556	2,7450748	0,0898604	2,6552144	452,0791000	10242,1432307
8	547	2,7379873	0,1026976	2,6352897	431,8070000	9790,0641307
9	539	2,7315888	0,1155318	2,6160540	413,0988567	9358,2571307
10	532	2,7259116	0,1283720	2,5975396	395,8581818	8945,1582740
11	527	2,7218106	0,1412092	2,5806014	380,7162618	8549,3000922
12	523	2,7185017	0,1540464	2,5644553	366,8219343	8168,5838304
13	519	2,7151674	0,1668836	2,5482838	353,4140816	7801,7618961
14	515	2,7118072	0,1797208	2,5320864	340,4758632	7448,3478145
15	511	2,7084209	0,1925580	2,5158629	327,9917608	7107,8719513
16	507	2,7050080	0,2053952	2,4996128	315,9459436	6779,8801905
17	503	2,7015680	0,2182324	2,4833356	304,3235556	6463,9342469
18	499	2,6981005	0,2310696	2,4670309	293,1100000	6159,6106913
19	495	2,6946052	0,2439068	2,4506984	282,2919065	5866,5006913
20	491	2,6910815	0,2567440	2,4343375	271,8551250	5584,2087848
21	486	2,6866363	0,2695812	2,4170551	261,2493000	5312,3536598
22	481	2,6821451	0,2824184	2,3997267	251,0306346	5051,1043598
23	476	2,6776070	0,2952556	2,3823514	241,1856111	4800,0737252
24	471	2,6730209	0,3080928	2,3649281	231,7011053	4558,8881141
25	466	2,6683859	0,3209300	2,3474559	222,5645100	4327,1870088
26	461	2,6637009	0,3337672	2,3299337	213,7635883	4104,6224988
27	456	2,6589648	0,3466044	2,3123604	205,2865190	3890,8589105
28	451	2,6541765	0,3594416	2,2947349	197,1219091	3685,5723915
29	445	2,6483600	0,3722788	2,2760812	188,8344348	3488,4504824
30	439	2,6424645	0,3851160	2,2573485	180,8625000	3299,6160476
31	433	2,6364879	0,3979532	2,2385347	173,1947556	3118,7535476
32	427	2,6304279	0,4107904	2,2196375	165,8202304	2945,5587920
33	421	2,6242821	0,4236276	2,2006545	158,7283658	2779,7385616
34	415	2,6180481	0,4364648	2,1815833	151,9089104	2621,0101958
35	409	2,6117233	0,4493020	2,1624213	145,3521000	2469,1012854
36	402	2,6042261	0,4621392	2,1420869	138,7033193	2323,7491854
37	395	2,5965971	0,4749764	2,1216207	132,3185490	2185,0458661
38	388	2,5888317	0,4878136	2,1010181	126,1880290	2052,7273171
39	381	2,5809250	0,5006508	2,0802742	120,3024000	1926,5392881
40	374	2,5728716	0,5134880	2,0593836	114,6525000	1806,2368881
41	367	2,5646661	0,5263252	2,0383409	109,2300000	1691,5843881
42	360	2,5563025	0,5391624	2,0171401	104,0255741	1582,3543881
43	353	2,5477747	0,5519996	1,9957751	99,0319000	1478,3288140
44	346	2,5390761	0,5648368	1,9742393	94,2409000	1379,2969140
45	339	2,5301997	0,5776740	1,9525257	89,6449200	1285,0560140
46	332	2,5211381	0,5905112	1,9306269	85,2367400	1195,4110940
47	324	2,5105450	0,6033484	1,9071966	80,7600000	1110,1743540
48	316	2,4996871	0,6161856	1,8835015	76,4718200	1029,4143540
49	308	2,4885507	0,6290228	1,8595279	72,3649000	952,9425340

I. Tabelle über die Werthe von $\mathfrak{P}_n$ und $\Sigma\mathfrak{P}_n$ für $p = 3$.

n.	P_n.	log. P_n	n log 1,03	log P_n — n log 1,03 — log $\mathfrak{P}_n$.	$\mathfrak{P}_n$.	$\Sigma\mathfrak{P}_n$.
50	300	2,4771213	0,6418600	1,8352613	68,4323316	880,5776340
51	291	2,4638930	0,6546972	1,8091958	64,4460000	812,1453024
52	282	2,4502491	0,6675314	1,7827147	60,6338000	747,6993024
53	273	2,4361626	0,6803716	1,7557910	56,9890000	687,0655024
54	264	2,4216039	0,6932088	1,7283951	53,5051000	630,0765024
55	255	2,4065402	0,7060460	1,7004942	50,1758000	576,5714024
56	246	2,3909351	0,7188832	1,6720519	46,9950000	526,3956024
57	237	2,3747483	0,7317204	1,6430279	43,9570000	479,4006024
58	228	2,3579348	0,7445576	1,6133772	41,0560600	435,4436024
59	219	2,3404441	0,7573948	1,5830493	38,2868262	394,3875424
60	210	2,3222193	0,7702320	1,5519873	35,6440740	356,1007162
61	201	2,3031961	0,7830692	1,5201269	33,1227840	320,4566422
62	192	2,2833012	0,7959064	1,4873948	30,7181350	287,3338582
63	182	2,2600714	0,8087436	1,4513278	28,2701326	256,6157232
64	172	2,2355284	0,8215808	1,4139476	25,9386660	228,3455906
65	162	2,2095150	0,8344180	1,3750970	23,7190330	202,4069246
66	152	2,1818436	0,8472552	1,3345884	21,6067000	178,6878916
67	142	2,1522883	0,8600924	1,2921959	19,5972854	157,0811916
68	132	2,1205739	0,8729296	1,2476443	17,6866000	137,4839062
69	122	2,0863598	0,8857668	1,2005930	15,8705877	119,7973062
70	112	2,0492180	0,8986040	1,1506140	14,1453585	103,9267185
71	103	2,0128372	0,9114412	1,1013960	12,6297843	89,7813600
72	94	1,9731279	0,9242784	1,0488495	11,1905000	77,1515757
73	85	1,9294189	0,9371156	0,9923033	9,8243390	65,9610757
74	77	1,8864907	0,9499528	0,9365379	8,6404800	56,1367367
75	69	1,8388491	0,9627900	0,8760591	7,5172517	47,4962567
76	62	1,7923917	0,9756272	0,8167645	6,5579000	39,9790050
77	55	1,7403627	0,9884644	0,7518983	5,6480465	33,4211050
78	49	1,6901961	1,0013016	0,6888945	4,8853368	27,7730585
79	43	1,6334685	1,0141388	0,6193297	4,1622648	22,8877217
80	37	1,5682017	1,0269760	0,5412257	3,4771680	18,7254569
81	32	1,5051500	1,0398132	0,4653368	2,9196907	15,2482889
82	28	1,4471580	1,0526504	0,3945076	2,4803200	12,3285982
83	24	1,3802112	1,0654876	0,3147236	2,0640662	9,8482782
84	20	1,3010300	1,0783248	0,2227052	1,6699565	7,7842120
85	17	1,2304489	1,0911620	0,1392869	1,3781200	6,1142555
86	14	1,1461280	1,1039992	0,0421288	1,1018661	4,7361355
87	12	1,0791812	1,1168364	0,9623448—1	0,9169482	3,6342694
88	10	1,0000000	1,1296736	0,8703264—1	0,7418675	2,7173212
89	8	0,9030900	1,1425108	0,7605792—1	0,5762080	1,9754537
90	6	0,7781513	1,1553480	0,6228033—1	0,4195690	1,3992457
91	5	0,6989700	1,1681852	0,5307848—1	0,3394570	0,9796767
92	4	0,6020600	1,1810224	0,4210376—1	0,2636560	0,6402197
93	3	0,4771213	1,1938596	0,2832617—1	0,1919825	0,3765637
94	2	0,3010300	1,2066968	0,0943332—1	0,1242605	0,1845812
95	1	0,0000000	1,2195340	0,7804660—2	0,0603207	0,0603207

II. Tabelle über die Werthe von $\mathfrak{P}_n$ und $\Sigma \mathfrak{P}_n$ für p = 4.

n.	P.	log Pn.	n log 1,04	log Pn — n log 1,04 = log 𝔓n.	𝔓n.	Σ𝔓n.
0	1000	3,0000000	0,0000000	3,0000000	1000,0000000	12431,5242277
1	750	2,8750613	0,0170333	2,8580280	721,1540000	11431,5242277
2	661	2,8202015	0,0340666	2,7861349	611,1318428	10710,3702277
3	618	2,7909883	0,0510999	2,7398886	549,3998889	10099,2383849
4	593	2,7730547	0,0681332	2,7049215	506,8991111	9549,8384960
5	579	2,7626786	0,0851665	2,6775121	475,8960000	9042,9393849
6	567	2,7535831	0,1021998	2,6513833	448,1086210	8567,0433849
7	556	2,7450748	0,1192331	2,6258417	422,5145778	8118,9347639
8	547	2,7379873	0,1362664	2,6017209	399,6878274	7696,4201861
9	539	2,7315888	0,1532997	2,5782891	378,6946087	7296,7323587
10	532	2,7259116	0,1703330	2,5555786	359,4004166	6918,0377500
11	527	2,7218106	0,1873663	2,5344443	342,3294708	6558,6373334
12	523	2,7185017	0,2043996	2,5141021	326,6646000	6216,3078626
13	519	2,7151674	0,2214329	2,4937345	311,6983572	5889,6432626
14	515	2,7118072	0,2384662	2,4733410	297,4000000	5577,9449054
15	511	2,7084209	0,2554995	2,4529214	283,7405198	5280,5449054
16	507	2,7050080	0,2725328	2,4324752	270,6918681	4996,8043856
17	503	2,7015680	0,2895661	2,4120019	258,2271177	4726,1125175
18	499	2,6981005	0,3065994	2,3915011	246,3207968	4467,8853998
19	495	2,6946052	0,3236327	2,3709725	234,9484327	4221,5646030
20	491	2,6910815	0,3406660	2,3504155	224,0864105	3986,6161703
21	486	2,6866363	0,3576993	2,3289370	213,2735393	3762,5297598
22	481	2,6821451	0,3747326	2,3074125	202,9609328	3549,2562205
23	476	2,6776070	0,3917659	2,2858411	193,1261804	3346,2952877
24	471	2,6730209	0,4087992	2,2642217	183,7476338	3153,1691073
25	466	2,6683859	0,4258325	2,2425534	174,8048040	2969,4214735
26	461	2,6637009	0,4428658	2,2208351	166,2781153	2794,6166695
27	456	2,6589648	0,4598991	2,1990657	158,1487254	2628,3385542
28	451	2,6541765	0,4769324	2,1772441	150,3987276	2470,1898288
29	445	2,6483600	0,4939657	2,1543943	142,6902623	2319,7911012
30	439	2,6424645	0,5109990	2,1314655	135,3522500	2177,1008389
31	433	2,6364879	0,5280323	2,1084556	128,3676503	2041,7485889
32	427	2,6304279	0,5450656	2,0853623	121,7201111	1913,3809386
33	421	2,6242821	0,5620989	2,0621832	115,3940000	1791,6608275
34	415	2,6180481	0,5791322	2,0389159	109,3744528	1676,2668275
35	409	2,6117233	0,5961655	2,0155578	103,6472621	1566,8923747
36	402	2,6042261	0,6131988	1,9910273	97,9551690	1463,2451126
37	395	2,5965971	0,6302321	1,9663650	92,5475642	1365,2899436
38	388	2,5888317	0,6472654	1,9415663	87,4110400	1272,7423794
39	381	2,5809250	0,6642987	1,9166263	82,5327578	1185,3313394
40	374	2,5728716	0,6813320	1,8915396	77,9003717	1102,7985816
41	367	2,5646661	0,6983653	1,8663008	73,5022685	1024,8982099
42	360	2,5563025	0,7153986	1,8409039	69,3272316	951,3959414
43	353	2,5477747	0,7324319	1,8153428	65,3646300	882,0687098
44	346	2,5390761	0,7494652	1,7896109	61,6042843	816,7040798
45	339	2,5301997	0,7664985	1,7637012	58,0364927	755,0997955
46	332	2,5211381	0,7835318	1,7376063	54,6520250	697,0633028
47	324	2,5105450	0,8005651	1,7099799	51,2837582	642,4112778
48	316	2,4996871	0,8175984	1,6820887	48,0937556	591,1275196
49	308	2,4885507	0,8346317	1,6539190	45,0732621	543,0337640

II. Tabelle über die Werthe von $\mathfrak{P}_n$ und $\Sigma\mathfrak{P}_n$ für p = 4.

n.	Pn.	log Pn.	n log 1,64	log Pn — n log 1,04 = log $\mathfrak{P}_n$.	$\mathfrak{P}_n$.	$\Sigma\mathfrak{P}_n$.
50	300	2,4771213	0,8516650	1,6254563	42,2139778	497,9605019
51	291	2,4638930	0,8686983	1,5951947	39,3726545	455,7465241
52	282	2,4502491	0,8857316	1,5645175	36,6874509	416,3738696
53	273	2,4361626	0,9027619	1,5333977	34,1505471	379,6861187
54	264	2,4216039	0,9197982	1,5018057	31,7545295	345,5358716
55	255	2,4065402	0,9368315	1,4697087	29,4923067	313,7813421
56	246	2,3909351	0,9538648	1,4370703	27,3571125	284,2890354
57	237	2,3747483	0,9708981	1,4038502	25,3125412	256,9319229
58	228	2,3579348	0,9879314	1,3700034	23,4424700	231,5893817
59	219	2,3404441	1,0049647	1,3354794	21,6510700	208,1469117
60	210	2,3222193	1,0219980	1,3002213	19,9627923	186,4958417
61	201	2,3031961	1,0390313	1,2641648	18,3723546	166,5330494
62	192	2,2833012	1,0560646	1,2272366	16,8747193	148,1606948
63	182	2,2600714	1,0730979	1,1869735	15,3806071	131,2859755
64	172	2,2355284	1,0901312	1,1453972	13,9764609	115,9053684
65	162	2,2095150	1,1071645	1,1023505	12,6575729	101,9289075
66	152	2,1818436	1,1241978	1,0576458	11,4194658	89,2713346
67	142	2,1522883	1,1412311	1,0110572	10,2578709	77,8518688
68	132	2,1205739	1,1582644	0,9623095	9,1687364	67,5939979
69	122	2,0863598	1,1752977	0,9110621	8,1482076	58,4252615
70	112	2,0492180	1,1923310	0,8568870	7,1926183	50,2770539
71	103	2,0128372	1,2093613	0,8034729	6,3602300	43,0844356
72	94	1,9731279	1,2263976	0,7467303	5,5812351	36,7242056
73	85	1,9294189	1,2434309	0,6859880	4,8527511	31,1429705
74	77	1,8864907	1,2604642	0,6260265	4,2269440	26,2902194
75	69	1,8388491	1,2774975	0,5613516	3,6420975	22,0632754
76	62	1,7923917	1,2945308	0,4978609	3,1467407	18,4211779
77	55	1,7403627	1,3115641	0,4287986	2,6841000	15,2744372
78	49	1,6901961	1,3285974	0,3615987	2,2993164	12,5903372
79	43	1,6334685	1,3456307	0,2878378	1,9401614	10,2910208
80	37	1,5682017	1,3626640	0,2055377	1,6052315	8,3508594
81	32	1,5051500	1,3796973	0,1254527	1,3349122	6,7456279
82	28	1,4471580	1,3967306	0,0504274	1,1231234	5,4107157
83	24	1,3802112	1,4137639	0,9664473—1	0,9256510	4,2875923
84	20	1,3010300	1,4307972	0,8702328—1	0,7417077	3,3619413
85	17	1,2304489	1,4478305	0,7826184—1	0,6062031	2,6202336
86	14	1,1461280	1,4648638	0,6812642—1	0,4800253	2,0140302
87	12	1,0791812	1,4818971	0,5972841—1	0,3956254	1,5340049
88	10	1,0000000	1,4989304	0,5010696—1	0,3170075	1,1383795
89	8	0,9030900	1,5159637	0,3871263—1	0,2438519	0,8213720
90	6	0,7781513	1,5329970	0,2451543—1	0,1758548	0,5775201
91	5	0,6989700	1,5500303	0,1489397—1	0,1409093	0,4016653
92	4	0,6020600	1,5670636	0,0349964—1	0,1083918	0,2607560
93	3	0,4771213	1,5840969	0,8930244—2	0,0781671	0,1523642
94	2	0,3010300	1,6011302	0,6998998—2	0,0501071	0,0741971
95	1	0,0000000	1,6181635	0,3818365—2	0,0240900	0,0240900

III. Zusammenstellung verschiedener Sterblichkeitstabellen.

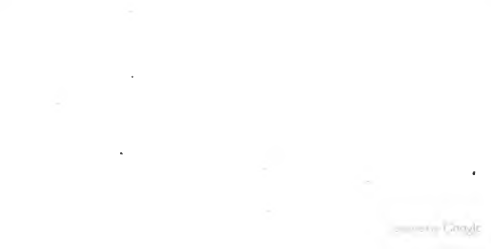
Alter.	Baumann-Süßmilch.	Deparcieux für Rentenierer.	Kerseboom für Holland.	Duvillard für Frankreich.	Equitable Gesellschaft in London.	Simpson für London.	Finlaison. männl. Geschlecht.	Finlaison. weibl. Geschlecht.	Kritter. Ehemänner.	Kritter. Ehefrauen u. Wittwen.	Wargentin für Schweden. männl. Geschlecht.	Wargentin für Schweden. weibl. Geschlecht.	Brune für Frauen der preußischen Wittwenkasse.
0	1000	1000	1400	1000000	10000	1000	1000	1000	—	—	10000	10000	—
1	750	745	1125	767525	8461	680	981	981	—	—	7700	7910	—
2	661	709	1075	671834	7779	547	963	967	—	—	7200	7392	—
3	618	682	1030	624668	7274	496	949	955	—	—	6863	7042	—
4	593	662	993	598713	6998	469	937	945	—	—	6623	6792	—
5	579	647	964	583151	6797	452	927	935	—	—	6473	6657	—
6	567	634	947	573025	6676	440	919	926	—	—	6348	6537	—
7	556	624	930	565838	6594	330	912	919	—	—	6243	6432	—
8	547	615	913	560245	6536	422	906	913	—	—	6153	6347	—
9	539	607	904	555486	6493	415	901	908	—	—	6078	6277	—
10	532	600	895	551122	6460	410	896	903	—	—	6013	6217	—
11	527	595	886	546888	6435	405	891	899	—	—	5958	6165	—
12	523	590	878	542630	6409	400	886	895	—	—	5913	6119	—
13	519	585	870	538255	6381	395	881	892	—	—	5868	6079	—
14	515	581	863	533711	6351	390	876	887	—	—	5828	6044	—
15	511	578	856	528969	6320	385	872	883	—	—	5788	6009	10809
16	507	574	849	524020	6288	380	866	876	—	—	5749	5974	10628
17	503	570	842	518863	6255	375	860	870	—	—	5710	5934	10457
18	499	565	835	513502	6221	370	854	863	496	496	5671	5894	10296
19	495	561	826	507949	6186	365	846	856	491	491	5627	5852	10144
20	491	556	817	502216	6150	360	837	848	486	486	5583	5809	10000
21	486	551	808	496317	6113	355	827	841	481	481	5533	5766	9863
22	481	545	800	490267	6075	350	816	834	476	476	5483	5723	9732

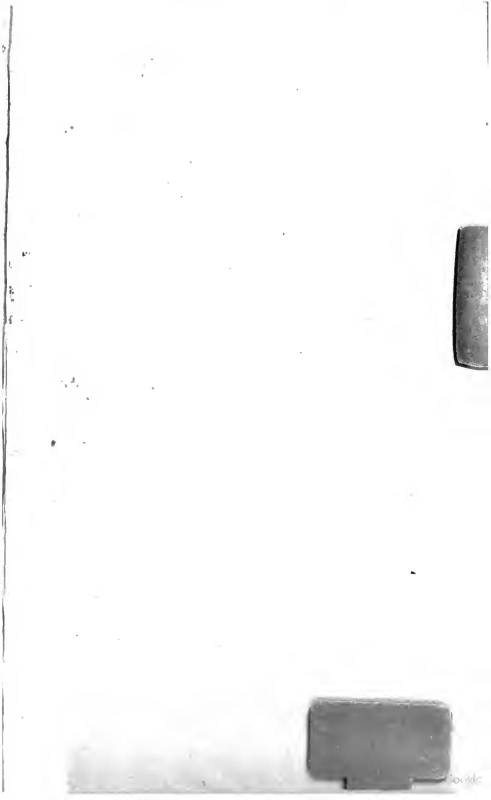
23	476	540	792	484083	6035	345	804	827	471	471	5433	5680	9607
24	471	534	783	477777	5993	339	793	820	466	466	5378	5636	9488
25	466	529	772	471366	5649	333	782	813	461	461	5323	5591	9374
26	461	523	760	464863	5903	327	771	805	456	456	5268	5546	9264
27	456	517	747	458282	5855	321	761	798	451	451	5213	5496	9158
28	451	512	735	451635	5805	315	751	791	446	446	5158	5444	9055
29	445	506	723	444932	5754	308	742	784	440	440	5103	5389	8954
30	439	500	711	438183	5702	301	732	777	434	434	5047	5334	8854
31	433	495	699	431398	5649	294	723	770	428	428	4988	5274	8754
32	427	490	687	424583	5595	287	714	763	422	422	4928	5214	8654
33	421	484	675	417744	5540	280	705	755	416	416	4868	5149	8554
34	415	479	665	410886	5483	273	696	748	410	410	4808	5084	8454
35	409	474	655	404012	5424	266	687	740	404	404	4748	5019	8355
36	402	469	645	397123	5364	259	679	732	398	398	4688	4959	8256
37	395	464	635	390219	5303	252	670	724	392	392	4628	4903	8158
38	388	459	625	383300	5241	245	662	716	385	385	4568	4847	8060
39	381	454	615	376363	5179	237	653	708	378	378	4508	4791	7962
40	374	449	605	369404	5117	229	644	700	371	371	4448	4733	7865
41	367	444	596	362419	5055	222	636	693	364	364	4383	4668	7768
42	360	439	587	355400	4993	214	627	685	357	357	4311	4593	7671
43	353	434	578	348342	4931	206	619	677	350	350	4231	4517	7573
44	346	429	569	351235	4869	199	610	669	342	343	4151	4441	7475
45	339	424	560	334072	4806	192	602	661	334	336	4071	4366	7377
46	332	419	550	326843	4742	185	594	654	326	329	3991	4294	7278
47	324	413	540	319539	4675	178	586	646	318	322	3911	4227	7178
48	316	408	530	312148	4605	171	578	638	310	315	3831	4162	7077
49	308	402	518	304662	4532	165	570	631	301	308	3751	4097	6974
50	300	396	507	297070	4455	159	561	623	292	301	3666	4027	6869
51	291	390	495	289361	4375	153	552	616	283	294	3571	3952	6762
52	282	384	482	281527	4293	147	542	608	274	287	3476	3872	6652
53	273	378	470	273560	4208	141	531	601	265	280	3381	3787	6537
54	264	371	458	265450	4120	135	520	593	255	272	3286	3702	6416
55	255	363	446	257193	4030	129	508	585	245	264	3191	3617	6389
56	246	355	434	248782	3937	123	495	576	235	256	3096	3532	6155
57	237	346	421	240214	3841	117	482	568	225	248	3001	3447	6014
58	228	338	408	231488	3743	112	468	559	215	240	2901	3357	5865

Alter.	Baumann-Süßmilch.	Deparcieux für Rentenierer.	Kerseboom für Holland.	Duvillard für Frankreich.	Equitable Gesellschaft in London.	Simpson für London.	Finlaison. männl. Geschlecht.	Finlaison. weibl. Geschlecht.	Kritter. Ehemänner.	Kritter. Ehefrauen u. Wittwen.	Wargentin für Schweden. männl. Geschlecht.	Wargentin für Schweden. weibl. Geschlecht.	Brune für Frauen der preußischen Wittwenkasse.
59	219	329	395	222605	3643	107	454	549	205	231	2801	3267	5708
60	210	319	382	213567	3542	102	440	539	195	221	2701	3167	5543
61	201	309	369	204380	3440	97	426	529	185	211	2596	3057	5370
62	192	299	356	195054	3337	92	413	519	175	201	2486	2939	5189
63	182	288	343	185600	3234	87	399	508	166	191	2371	2819	5000
64	172	278	329	176035	3130	82	385	496	157	181	2256	2699	4803
65	162	267	315	166377	3024	77	370	484	148	171	2141	2579	4598
66	152	256	301	156651	2918	72	355	471	139	161	2026	2459	4385
67	142	245	287	146882	2811	67	339	457	130	151	1911	2339	4163
68	132	234	273	137102	2704	62	322	443	121	141	1791	2219	3932
69	122	222	259	127347	2596	58	305	428	112	131	1666	2099	3694
70	112	211	245	117656	2487	54	288	412	103	122	1541	1979	3452
71	103	199	231	108070	2378	50	270	395	95	113	1416	1849	3208
72	94	187	217	98637	2269	46	253	377	87	104	1291	1709	2963
73	85	175	203	89404	2159	42	235	358	79	95	1171	1559	2717
74	77	162	189	80423	2049	39	218	339	71	86	1051	1399	2471
75	69	148	175	71745	1938	36	202	319	63	77	941	1249	2226
76	62	134	160	63424	1827	33	185	298	55	68	836	1109	1984
77	55	120	145	55511	1715	30	171	277	47	59	736	979	1748
78	49	106	130	48057	1600	27	156	255	39	50	646	859	1524
79	43	94	115	41107	1481	25	141	233	32	42	561	749	1318
80	37	81	100	34705	1357		125	210	26	34	481	649	1134
81	32	70	87	28886	1219		110	189	21	27	406	554	972

82	28	59	75	23680	1069		95	168	17	21	336	464	827
83	24	49	64	19106	923		81	149	14	16	271	379	693
84	20	40	55	15175	783		68	132	11	12	211	299	567
85	17	33	45	11886	651		56	117	9	9	161	224	453
86	14	26	36	9224	527		44	103	7	7	121	169	356
87	12	21	28	7165	413		34	89	5	6	91	129	277
88	10	16	21	5670	315		24	76	3	5	69	99	215
89	8	12	15	4686	235		17	64	2	5	52	76	166
90	6	8	10	3830	170		11	52	1	5	38	58	127
91	5	5	7	3093	120		7	41	1	5	26	43	96
92	4	3	5	2466	84		4	30	1	4	17	31	72
93	3	1	3	1938	56		3	21	0	3	10	21	53
94	2	1	2	1499	35		1	14		2	4	13	38
95	1	0	1	1140	20		0	8		1	1	7	26
96	0		0	850	10			5		0	0	3	17
97				621	4			2				1	10
98				442	1			1				0	5
99				307	0			0					2
100				207									
101				135									
102				84									
103				51									
104				29									
105				16									
106				8									
107				4									
108				2									
109				1									

Gedruckt bei E. Polz in Leipzig.






BIBLIOTECA